إيهاب عمر

دوال أسيَّة ولوغاريثمية صيف 2021 – موعد (ب)

سؤال 5 :

معطاة الدالّة: $f(x)=a\cdot x^2-x^3$ المعرَّفة لكلّ x ، a هو پارامتر.

أجب عن البنود "أ – جـ" بالنسبة لِـ $0<a$. عبّر عن إجاباتك بدلالة a ، إذا دعت الحاجة.

أ. (1) جد مجالات موجبيّة وسالبيّة الدالّة $f(x)$.

(2) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

معطاة الدالّة: $g(x)=\ell n(f(x))$.

ب. (1) جد مجال تعريف الدالّة $g(x)$.

(2) جد خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالّة $g(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه الخطوط).

(3) جد إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة $g(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقطة.

جـ. معطى أنّه توجد للرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ نقطة تقاطع واحدة فقط مع المحور x .

(1) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $g(x)$.

(2) جد مجال القيَم الممكنة لِـ a ، التي بالنسبة لها الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ يقطع المحور x في نقطة واحدة فقط.

أجب عن البند "د" بالنسبة لِـ $a=0$.

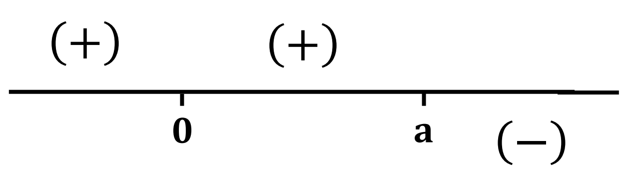
د. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $g(x)$. في الرسم البيانيّ، اذكر القيمتين العدديّتين لإحداثيّي نقطة تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور x .

أ)

(1)

$$f(x)=ax^2-x^3=x^2(a-x)\quad\Longrightarrow\quad f(0)=0\ ,\ \ f(a)=0$$

$$\begin{pmatrix} f(-a)=2a^3 \ \longrightarrow\ (+) \\ f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^3}{8}\ \longrightarrow\ (+) \\ f(2a)=-4a^3\ \longrightarrow\ (-) \end{pmatrix}$$

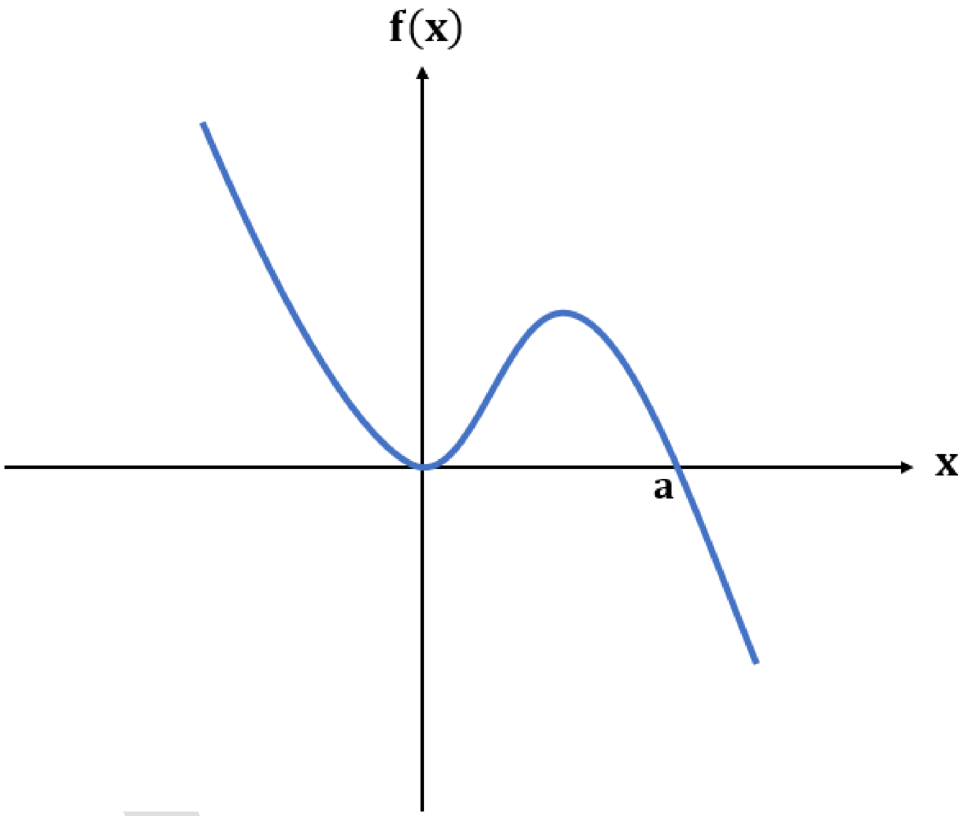


$$\Downarrow$$

$x < 0 \ , \ 0 < x < a$: مجال موجبيَّة الدالَّة

$a < x$: مجال سالبيَّة الدالَّة

(2)



ب)

(1)

$$g(x) = \ln\big(f(x)\big)$$

$$\downarrow$$

$$f(x) > 0$$

$\downarrow$ وجدنا سابقا مجال موجبيَّة الدالّة $f(x)$

$$\boxed{x < 0 \ , \ 0 < x < a}$$

(2)

<u>خُطوط التقارُب المُعامدة للمحور x :</u>

$$\lim_{x\to 0} g(x) \;\longrightarrow\; \lim_{x\to 0} \ln(ax^2 - x^3) = \ln(0) = -\infty \;\Longrightarrow\; \boxed{x = 0}$$

$$\lim_{x\to a} g(x) \;\longrightarrow\; \lim_{x\to a} \ln(ax^2 - x^3) = \ln(0) = -\infty \;\Longrightarrow\; \boxed{x = a}$$

<u>خُطوط التقارُب المُعامدة للمحور y :</u>

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) \;\longrightarrow\; \lim_{x\to -\infty} \ln(ax^2 - x^3) = \ln(\infty) = \infty \;\Longrightarrow\;$$ لا يوجد خط تقارب أُفقي

(3)

$$\boxed{g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2ax - 3x^2}{ax^2 - x^3} = \frac{2a - 3x}{ax - x^2}}$$

$$g'(x) = 0 \;\longrightarrow\; \frac{2a - 3x}{ax - x^2} = 0 \;\longrightarrow\; 2a - 3x = 0 \;\longrightarrow\; 3x = 2a$$

$$\longrightarrow\; x = \frac{2a}{3}$$

x		0		$\frac{2a}{3}$	
$g'(x)$	$-$		$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$

$$\left\{\begin{aligned}
&g'\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2a - 3\cdot\frac{a}{2}}{a\cdot\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a^2}{4}} = \frac{2}{a} \;\longrightarrow\; (+)\\
&g'\left(\frac{3a}{4}\right) = \frac{2a - 3\cdot\frac{3a}{4}}{a\cdot\frac{3a}{4} - \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \frac{\frac{a}{-4}}{\frac{3a^2}{16}} = -\frac{4}{3a} \;\longrightarrow\; (-)\\
&g'(-a) = \frac{2a - 3\cdot(-a)}{a\cdot(-a) - (-a)^2} = \frac{5a}{-2a^2} = -\frac{5}{2a} \;\longrightarrow\; (-)
\end{aligned}\right.$$

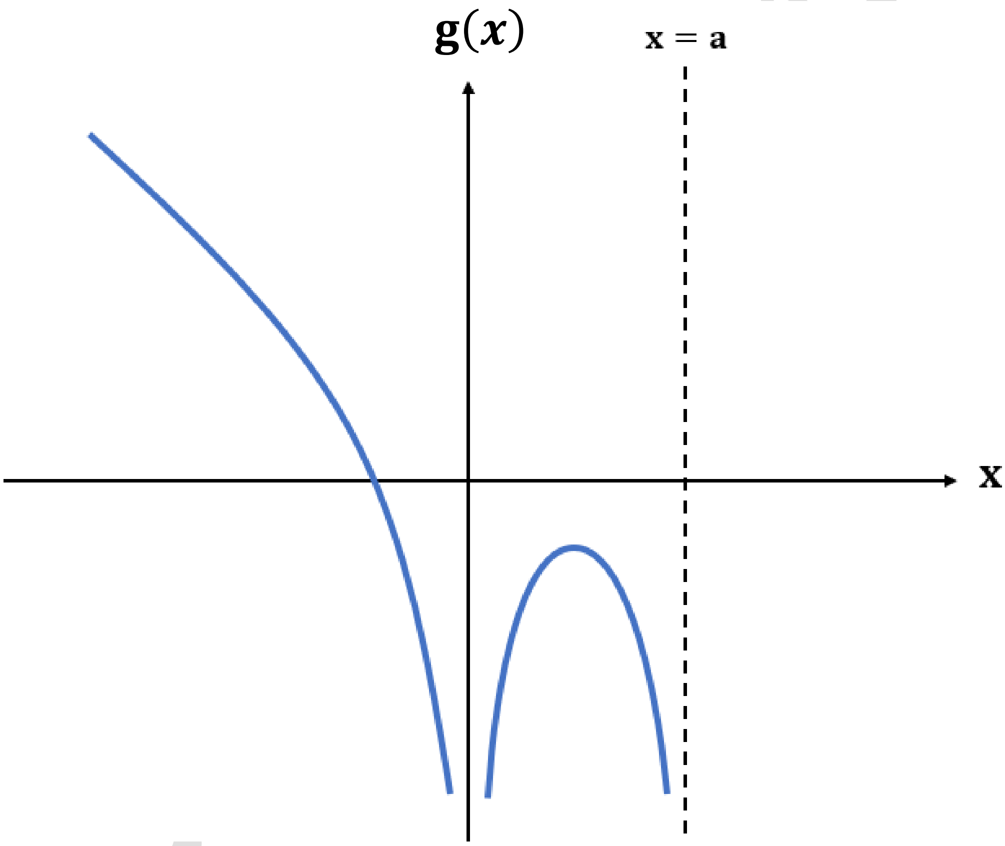
$$g\left(\frac{2a}{3}\right) = \ln\left(a\left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \left(\frac{2a}{3}\right)^3\right) = \ln\left(\frac{4a^3}{27}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{2a}{3},\ \ln\left(\frac{4a^3}{27}\right)\right) \max}$$

ج)

(1)



(2)

$$\ln\left(\frac{4a^3}{27}\right) < 0 \longrightarrow \frac{4a^3}{27} < 1 \longrightarrow 4a^3 < 27 \longrightarrow a^3 < 6.75 \longrightarrow a < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

مُعطى: $0 < a$ $\Downarrow$

$$\boxed{0 < a < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}}$$

(د)

$$g(x) = \ln(ax^2 - x^3) \xrightarrow{a=0} \boxed{g(x) = \ln(-x^3)}$$

(مجال التعريف) $\boxed{x < 0\ ,\ \ 0 < x < a} \xrightarrow{a=0} \boxed{x < 0}$

(نُقطة التقاطُع مع محور x) $\ln(-x^3) = 0 \implies e^0 = -x^3 \implies 1 = -x^3 \implies x = -1$