بحث دالَّة شتاء 2018

سؤال 7 :

معطاة عائلة الدوالّ: $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}$. a هو پارامتر، $a \neq 0$ ، $a \neq 4$.

أجب عن البند "أ" . عبِّر بدلالة a حسب الحاجة. فرّق بين $a>0$ وبين $a<0$ حسب الحاجة.

أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة f(x) .

(2) جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة f(x) مع المحورين.

(3) جد معادلة خطّ التقارب الموازي للمحور x للدالّة f(x) .

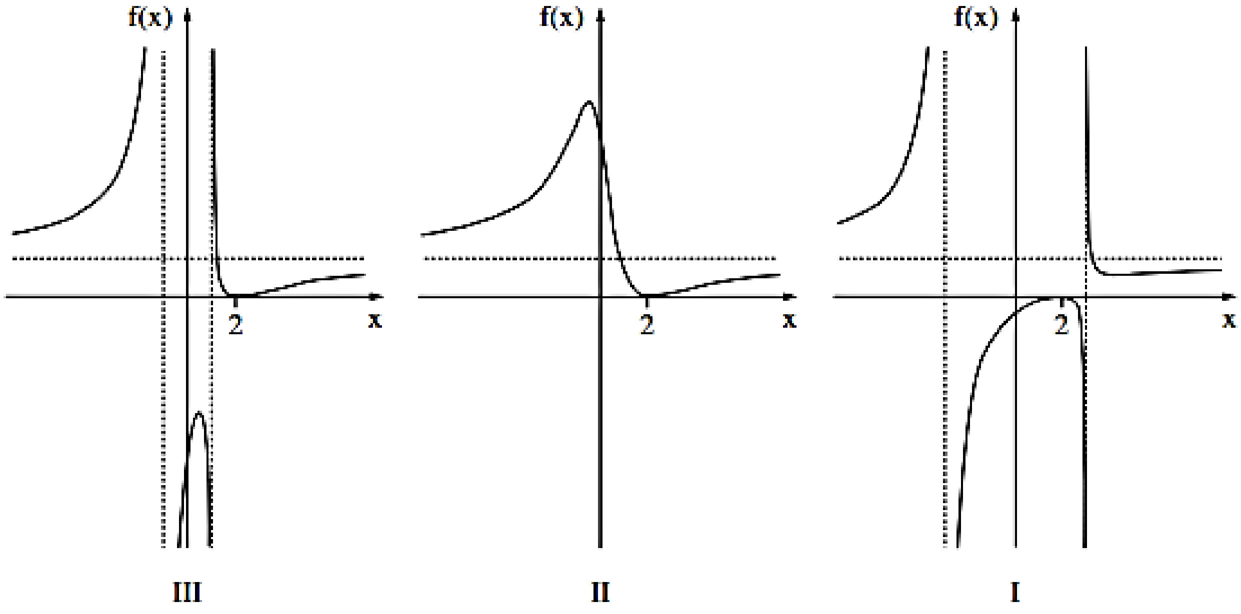
(4) جد معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحور x للدالّة f(x) (إذا وُجدت مثل هذه الخطوط) .

أجب عن البند "ب" . عبِّر بدلالة a حسب الحاجة. فرّق بين $a>4$ وبين $a<4$ حسب الحاجة.

ب. جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة f(x) ، وحدِّد نوع هذه النقاط.

جـ. أمامك ثلاثة رسوم بيانيّة ممكنة للدالّة f(x) ، كلّ واحد منها بالنسبة لقيمة مختلفة لـ a .

اكتب ما هو مجال قيَم a الملائم لكلّ واحد من الرسوم البيانيّة I-III . علّل إجابتك.



أ)

(1)

$$f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}$$

<u>في حال كان $a>0$:</u>

$$x^2-a\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$x^2\neq a$$
$$\Downarrow$$
$$x\neq \pm\sqrt{a}$$

<u>في حال كان $a<0$:</u>

$$x^2-a\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$x^2\neq a$$
$$\Downarrow$$
$$\emptyset$$

الدَّالَّة مُعرَّفة لكُل x

(2)

تقاطُع مع محور y :

$$f(0)=\frac{(0-2)^2}{0^2-a}=-\frac{4}{a}$$

$$\left(0\ ,-\frac{4}{a}\right)$$

تقاطُع مع محور x :

$$f(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-a} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 2$$

$$(\,2\,,0\,)$$

(3)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)^2}{x^2-a} \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2-a} \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-\cancel{4x}+\cancel{4}}{x^2-\cancel{a}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-2)^2}{x^2-a} \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2-a} \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-\cancel{4x}+\cancel{4}}{x^2-\cancel{a}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\boxed{y = 1}$$

(4)

في حال $a < 0$:

لا يوجد خطوط تقارب مُعامدة للمحور x .

في حال $a > 0$:

$$\lim_{x \to \sqrt{a}} f(x) \longrightarrow \lim_{x \to \sqrt{a}} \frac{(x-2)^2}{x^2-a} \longrightarrow \lim_{x \to \sqrt{a}} \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}^2-a} = \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{0} = \infty$$

$$\boxed{x = \sqrt{a}}$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{a}} f(x) \longrightarrow \lim_{x \to -\sqrt{a}} \frac{(x-2)^2}{x^2-a} \longrightarrow \lim_{x \to -\sqrt{a}} \frac{(-\sqrt{a}-2)^2}{(-\sqrt{a})^2-a} = \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{0} = \infty$$

$$\boxed{x = -\sqrt{a}}$$

ب)

<u>نجد احداثيات النُقاط القُصوى في الدَّالّة :</u>

$$f'(x) = \frac{2(x-2)\cdot(x^2-a)-(x-2)^2\cdot 2x}{(x^2-a)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)((x^2-a)-(x-2)x)}{(x^2-a)^2} = \frac{2(x-2)((x^2-a-x^2+2x)}{(x^2-a)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2-a)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2-a)^2} = 0$$

$$\cdot (x^2-a)^2 \Downarrow$$

$$2(x-2)(2x-a) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 2 \quad , \quad x = \frac{a}{2}$$

بالنسبة ل $a > 4$:

x		$-\sqrt{a}$		2		$\sqrt{a}$		$\frac{a}{2}$	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2-a)^2}$$

$x < -\sqrt{a}$:

$$2\underbrace{(x-2)}_{(-)}\underbrace{(2x-a)}_{(-)} > \mathbf{0}$$

$-\sqrt{a} < x < 2$:

$$2\underbrace{(x-2)}_{(-)}\underbrace{(2x-a)}_{(-)} > \mathbf{0}$$

$: \; 2 < x < \sqrt{a}$

$$2\underbrace{(x-2)}_{(+)}\underbrace{(2x-a)}_{(-)} < \mathbf{0}$$

$: \; \sqrt{a} < x < \frac{a}{2}$

$$2\underbrace{(x-2)}_{(+)}\underbrace{(2x-a)}_{(-)} < \mathbf{0}$$

$: \; \frac{a}{2} < x$

$$2\underbrace{(x-2)}_{(+)}\underbrace{(2x-a)}_{(+)} > \mathbf{0}$$

$$f(2) = 0$$

$$(\,2 \;,\; 0\,) \;\; max$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{(\frac{a}{2}-2)^2}{\frac{a^2}{4}-a} = \frac{\frac{a^2}{4}-2a+4}{\frac{a^2}{4}-a} = \frac{\frac{a^2-8a-16}{4}}{\frac{a^2-4a}{4}} = \frac{a^2-8a-16}{a(a-4)} = \frac{(a-4)^2}{a(a-4)} = \frac{a-4}{a}$$

$$\left(\frac{a}{2} \;,\; \frac{a-4}{a}\right) \;\; min$$

بالنسبة ل $a < 4$:

x		$-\sqrt{a}$		$\frac{a}{2}$		$\sqrt{a}$		2	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗	max	↘		↘	min	↗

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2-a)^2}$$

: $x < -\sqrt{a}$

$$\underbrace{2(x-2)}_{(-)}\underbrace{(2x-a)}_{(-)} > \mathbf{0}$$

: $-\sqrt{a} < x < \frac{a}{2}$

$$\underbrace{2(x-2)}_{(-)}\underbrace{(2x-a)}_{(-)} > \mathbf{0}$$

: $\frac{a}{2} < x < \sqrt{a}$

$$\underbrace{2(x-2)}_{(-)}\underbrace{(2x-a)}_{(+)} < \mathbf{0}$$

: $\sqrt{a} < x < 2$

$$2(x-2)(2x-a) < \mathbf{0}$$

$$\underset{(-)}{\underline{(x-2)}} \quad \underset{(+)}{\underline{(2x-a)}}$$

$: \quad 2 < x$

$$2(x-2)(2x-a) > \mathbf{0}$$

$$\underset{(+)}{\underline{(x-2)}} \quad \underset{(+)}{\underline{(2x-a)}}$$

$$f(2) = 0$$

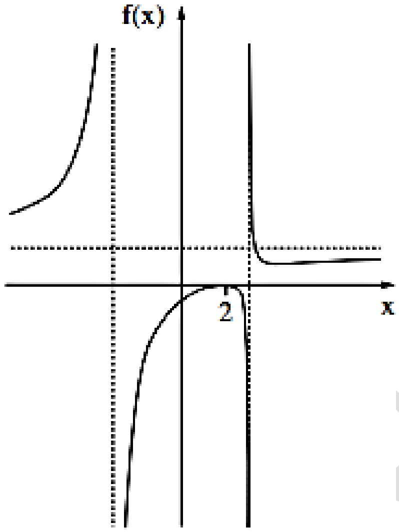
$$(\,2\;,\;\;0\,)\;\; min$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{(\frac{a}{2}-2)^2}{\frac{a^2}{4}-a} = \frac{\frac{a^2}{4}-2a+4}{\frac{a^2}{4}-a} = \frac{\frac{a^2-8a-16}{4}}{\frac{a^2-4a}{4}} = \frac{a^2-8a-16}{a(a-4)} = \frac{(a-4)^2}{a(a-4)} = \frac{a-4}{a}$$

$$\left(\frac{a}{2}\;,\;\;\frac{a-4}{a}\right)\;\; max$$

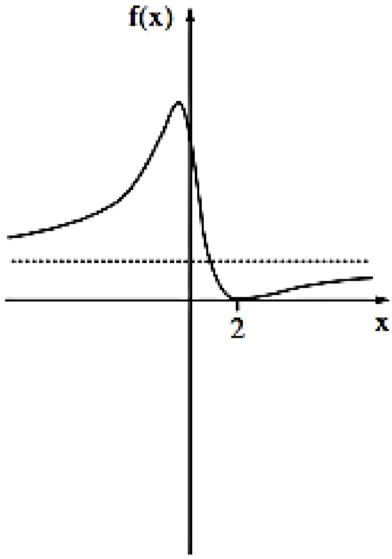
ج)

<u>الدَّالَّة 1 :</u>



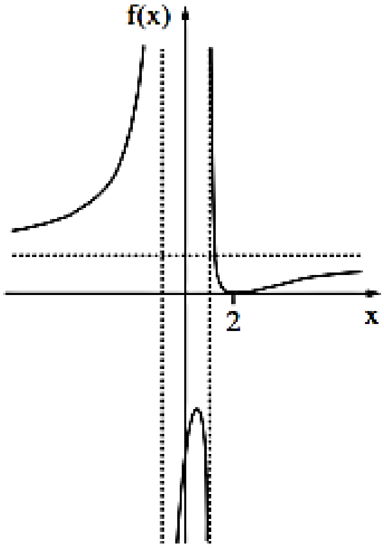
النُقطة $(2 , 0)$ هي نُقطة max كما هو واضح من الرسم ولهذا $a > 4$

<u>الدَّالَّة 2 :</u>



الدَّالَّة مُعرَّفَة لكل x ولهذا $a < 0$

الدَّالَّة 3 :



النُّقطة $(2,0)$ هي نُقطة min كما هو واضح من الرسم ولهذا $0 < a < 4$