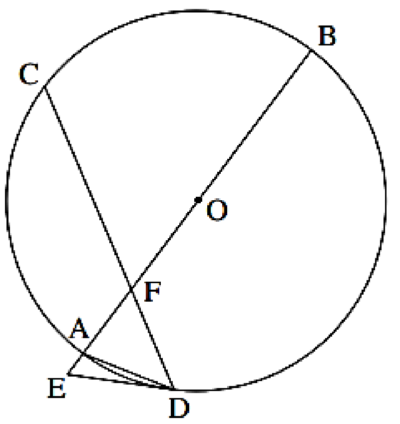
حساب مُثلَّثات شتاء 2022

سُؤال 5 :

AB هو قطر في دائرة نصف قطرها R ومركزها O . الوتر CD يقطع القطر AB في النقطة F .
المماسّ للدائرة في النقطة D يقطع امتداد القطر AB في النقطة E (انظر الرسم).



نرمز: $\measuredangle ADE = \alpha$.

أ. بيّن أنّ $\measuredangle BAD = 90^o - \alpha$.

معطى أنّ $ED = FD$.

ب. عبّر بدلالة α عن مقدار $\measuredangle CDA$.

جـ. عبّر بدلالة R وَ α عن مساحة المثلّث AFD .

د. (1) عبّر بدلالة α عن النسبة بين المساحتَين $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) معطى أنّ $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1 + \sqrt{3}$.

جد α .

أ)

$$\measuredangle ADE = \measuredangle ABD = \alpha$$

الزاوية المحصورة بين المماس والوتر مُساوية للزاوية المُحيطيَّة المُقابلة للوتر

<u>ننظُر الى المُثلَّث ΔABD :</u>

$$\measuredangle ABD = \alpha$$

$$\measuredangle ADB = 90°$$ (الزاوية المُحيطيَّة المُقابلة للقُطر تُساوي 90)

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle BAD = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$$ (مجموع زوايا المُثلَّث يُساوي 180)

ب)

$\measuredangle FAD$ هي زاوية خارجيَّة للمُثلَّث ΔAED

الزاوية الخارجيَّة للمُثلَّث تُساوي مجموع زوايا المُثلَّث غير الزاوية المُجاورة لها

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle AED + \measuredangle ADE = 90 - \alpha$$

$\sphericalangle ADE = \alpha \Downarrow$

$$\sphericalangle AED + \alpha = 90 - \alpha$$

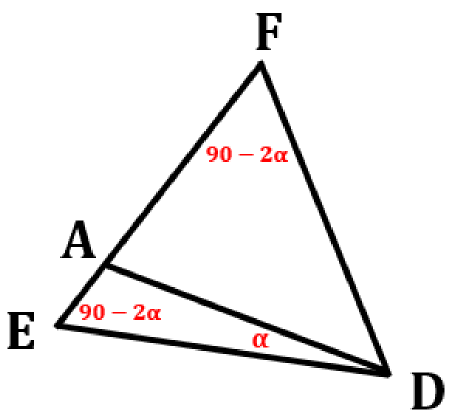
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sphericalangle AED = 90 - 2\alpha}$$

✓ $ED = FD$ $\Leftarrow$ ΔFED مُثلَّث مُتساوي الساقين

✓ ينتُج أنَّ $\sphericalangle AFD = 90 - 2\alpha$ (زوايا القاعدة في مُثلَّث مُتساوي الساقين)

<u>الان , ننظُر الى المُثلَّث ΔEFD :</u>



$$\sphericalangle ADF = 180 - \sphericalangle ADE - \sphericalangle FED - \sphericalangle EFD$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ADF = 180 - \alpha - (90 - 2\alpha) - (90 - 2\alpha)$$

$$\Downarrow$$

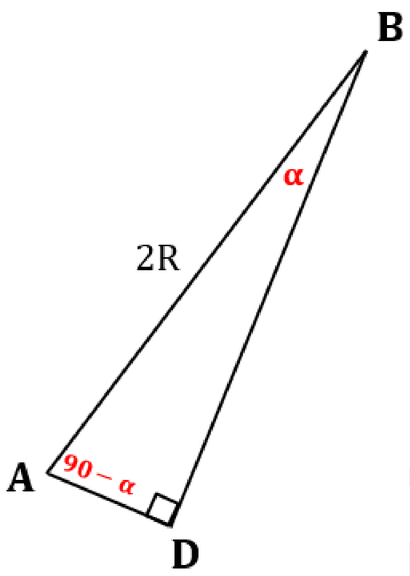
$$\sphericalangle ADF = 180 - \alpha - 90 + 2\alpha - 90 + 2\alpha = 3\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sphericalangle CDA = 3\alpha}$$

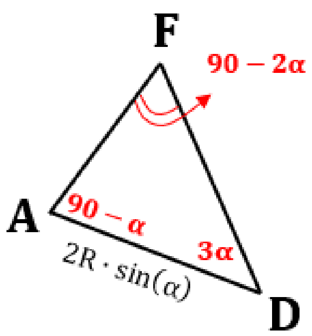
ج)

<u>ننظُر الى المُثلَّث ΔABD :</u>



(قانون سينوس العام) $\frac{AD}{\sin(\sphericalangle B)} = 2R \longrightarrow \frac{AD}{\sin(\alpha)} = 2R \longrightarrow \boxed{AD = 2R \cdot \sin(\alpha)}$

<u>الان , ننظُر الى المُثلَّث ΔAFD :</u>



(قانون سينوس العام) $\frac{FD}{\sin(\sphericalangle FAD)} = \frac{AD}{\sin(\sphericalangle AFD)} \longrightarrow \frac{FD}{\sin(90-\alpha)} = \frac{2R \cdot \sin(\alpha)}{\sin(90-2\alpha)}$

$\longrightarrow \frac{FD}{\cos(\alpha)} = \frac{2R \cdot \sin(\alpha)}{\cos(2\alpha)} \longrightarrow FD = \frac{2 \cdot R \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{R \cdot \sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$

<u>استعملنا المُتطابقة :</u>

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

الان , نحسب مساحة المُثَلَّث ΔAFD :

$$S_{AFD}=\frac{AD\cdot FD\cdot\sin(\sphericalangle ADF)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{AFD}=\frac{2R\cdot\sin(\alpha)\cdot\frac{R\cdot\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}\cdot\sin(3\alpha)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{AFD}=\frac{R\cdot\sin(\alpha)\cdot R\cdot\sin(2\alpha)\cdot\sin(3\alpha)}{\cos(2\alpha)}$$

$$\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\tan(2\alpha)\ \Downarrow$$

$$\boxed{S_{AFD}=R^2\cdot\sin(\alpha)\cdot\tan(2\alpha)\cdot\sin(3\alpha)}$$

د)

(1)

$$\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta AED}}=\frac{\frac{FD\cdot AD\cdot\sin(\sphericalangle ADF)}{2}}{\frac{AD\cdot ED\cdot\sin(\sphericalangle ADE)}{2}}=\frac{FD\cdot\sin(\sphericalangle ADF)}{ED\cdot\sin(\sphericalangle ADE)}=\frac{\cancel{FD}\cdot\sin(\sphericalangle ADF)}{\cancel{ED}\cdot\sin(\sphericalangle ADE)}$$

$FD=ED$

$$\frac{\sin(\sphericalangle ADF)}{\sin(\sphericalangle ADE)}=\boxed{\frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)}}$$

(2)

$\sin(3\alpha)=\sin(2\alpha+\alpha)$

$$\frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)}=1+\sqrt{3}\ \longrightarrow\ \frac{\sin(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)}=1+\sqrt{3}$$

$$\longrightarrow\ \sin(2\alpha)\cdot\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}+\cos(2\alpha)=1+\sqrt{3}\ \longrightarrow\ 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\cdot\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}+\cos(2\alpha)=1+\sqrt{3}$$

$$\longrightarrow\ 2\cdot\cos^2(\alpha)+2\cos^2\alpha-1=1+\sqrt{3}\ \longrightarrow\ 4\cos^2(\alpha)=2+\sqrt{3}\ \longrightarrow\ \cos^2(\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}\right)$$

$\Downarrow$ α زاوية حادَّة

$$\boxed{\alpha = 15°}$$

<u>استعملنا في الحساب المُتطابقات التالية:</u>

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$