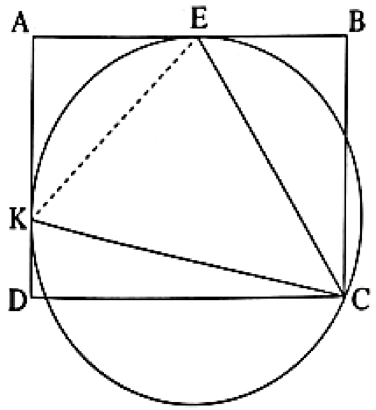
سُؤال 5 :



الشكل الرباعيّ ABCD هو مستطيل، اثنان من أضلاعه، AB وَ AD ، يمسّان دائرة نصف قطرها R في النقطتين E وَ K بالتلاؤم (انظر الرسم).

النقطة C تقع على محيط الدائرة.

أ. برهن أنّ: $\sphericalangle KCE = 45^{\circ}$.

معطى أنّ: $\sphericalangle KCD = \alpha$ ، $0^{\circ} < \alpha < 45^{\circ}$.

ب. (1) عبّر بدلالة α عن زوايا المثلّث KCE .

(2) عبّر بدلالة R وَ α عن أطوال أضلاع المثلّث KCE .

جـ. عبّر بدلالة α عن النسبة $\frac{EB}{AE}$.

معطى أنّ: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

د. احسب α .

أ)

نرمُز مركز الدائرة : O .

- $\sphericalangle AKO = 90^{\circ}$ (نصف القطر يُعامد المماس)
- $\sphericalangle AEO = 90^{\circ}$ (نصف القُطر يُعامد المماس)
- $\sphericalangle A = 90^{\circ}$ (زوايا المُستطيل قائمة)
- نستنتج أنَّ : $\sphericalangle EOK = 90^{\circ}$ (مجموع زوايا الشكل الرُباعي 180)
- ينتُج أنَّ : $\sphericalangle ECK = 45^{\circ}$ (الزاوية المُحيطيَّة تُساوي نصف الزاوية المركزيَّة المقابلة لنفس القوس)

ب)

(1)

- $\sphericalangle D = 90^{\circ}$, $\sphericalangle KCD = \alpha$ $\longleftarrow$ $\sphericalangle DKC = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$
- $\sphericalangle DKC = \sphericalangle KEC$ (الزاوية المحصورة بين المماس والوتر تُساوي الزاوية المُحيطيَّة المُقابلة للوتر)
- ينتُج أنَّ : $\sphericalangle KEC = 90 - \alpha$

- وبهذا يمكننا أنَّ نتوصل للزاوية الثالثة أو الأخيرة : $\measuredangle EKC = 180 - \measuredangle ECK - \measuredangle KEC$

$\measuredangle EKC = 180 - 45 - (90 - \alpha) = 45 + \alpha \longleftarrow$ (مجموع زوايا المثلث 180)

(2)

$$\frac{KE}{\sin(\measuredangle ECK)} = \frac{EC}{\sin(\measuredangle EKC)} = \frac{KC}{\sin(\measuredangle KEC)} = 2R$$

(قانون سينوس العام)

$$\Downarrow$$

$$\frac{KE}{\sin(45)} = \frac{EC}{\sin(45+\alpha)} = \frac{KC}{\sin(90-\alpha)} = 2R$$

$$\frac{KE}{\sin(45)} = 2R \quad\Downarrow\quad \boxed{KE = 2R \cdot \sin(45) = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}R}$$

$$\frac{EC}{\sin(45+\alpha)} = 2R \quad\Downarrow\quad \boxed{EC = 2R \cdot \sin(45+\alpha)}$$

$$\frac{KC}{\sin(90-\alpha)} = 2R \quad\Downarrow\quad \boxed{KC = 2R \cdot \sin(90-\alpha)}$$

ج)

نجد AE :

$$AE^2 + AK^2 = EK^2$$

$$(AE = EK) \Downarrow$$

مماسان يخرجان من نفس النقطة الى نفس الدائرة هما مماسان متساويان

$$2AE^2 = EK^2$$

$$\Downarrow$$

$$2AE^2 = \left(\sqrt{2}R\right)^2 \longrightarrow 2AE^2 = \left(\sqrt{2}R\right)^2 \longrightarrow 2AE^2 = 2R^2 \longrightarrow AE^2 = R^2$$

$$\longrightarrow \boxed{AE = R}$$

نجد EB :

$$\measuredangle ECB = 90 - \measuredangle ECK - \measuredangle KCD = 90 - 45 - \alpha = 45 - \alpha$$

$$\sin(45-\alpha)\cdot EC = EB \longrightarrow \boxed{\sin(45-\alpha)\cdot 2R\cdot\sin(45+\alpha) = EB}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{EB}{AE} = \frac{\sin(45-\alpha)\cdot 2R\cdot\sin(45+\alpha)}{R} = \boxed{\sin(45-\alpha)\cdot 2\cdot\sin(45+\alpha)}$$

د)

$$\sin(45-\alpha)\cdot 2\cdot\sin(45+\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$\sin(x) = \cos(90-x)$

$$\cos\big(90-(45-\alpha)\big)\cdot 2\cdot\sin(45+\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$2\cdot\cos(45+\alpha)\cdot\sin(45+\alpha) = \sin(45)$$

$$\Downarrow$$

استعملنا القانون :

$\sin(2x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

$$\sin(90+2\alpha) = \sin(45)$$

$(k\in\mathbb{Z})$ $\quad 90+2\alpha = 45+360k$

$$\Downarrow$$

$$2\alpha = -45+360k$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = -22.5+180k$$

✗ $(0<\alpha<45°)$

$$90+2\alpha = (180-45)+360k$$

$(k\in\mathbb{Z})$

$$\Downarrow$$

$$2\alpha = 45+360k$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 22.5+180k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha = 22.5}$$ ✓