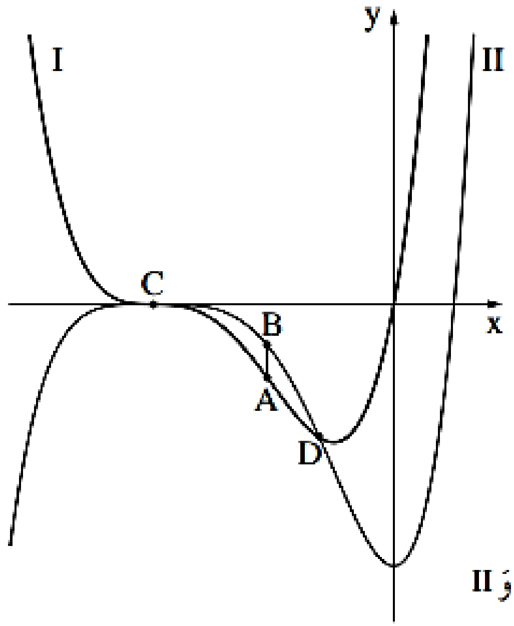
سؤال 7 :

أمامك الرسمان البيانيّان للدالّتين $f(x)$ وَ $f'(x)$.



أ. لائم بين الرسمين البيانيّين I وَ II وبين الدالّتين $f(x)$ وَ $f'(x)$. علّل.

معطى أنّ: $f'(x) = x(x+b)^3$.

$b > 1$ هو پارامتر.

توجد للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ نقطة التواء في $x = -1$.

ب. جد b.

C وَ D هما نقطتا التقاطع بين الدالّتين $f(x)$ وَ $f'(x)$ في المجال $x < 0$ ، كما هو موصوف في الرسم.

النقطتان A وَ B تقعان على الرسمين البيانيّين I وَ II بالتلاؤم، بحيث يكون المستقيم AB معامدًا للمحور x .

معطى أنّ: $x_C < x_A < x_D$ ،

$x_C = -4$ ،

$x_D = 1 - \sqrt{5}$ ،

جـ. جد الإحداثيّ x للنقطتين A وَ B الذي بالنسبة له تكون القطعة AB أكبر ما يمكن

(يمكن حلّ البند بدون إيجاد الدالّة $f(x)$).

أ)

في $x = 0$ الرسم البياني للدَّالَّة **I** ميله موجب وقيمته صفر .

في $x = 0$ الرسم البياني للدَّالَّة **II** ميله صفر وقيمته سالبة .

ولهذا لا يمكن أن يكون الرسم البياني || هو المشتقَّة . ما يعني أنَّ الرسم البياني || يصف الدَّالَّة $f(x)$ والرسم البياني **I** يصف الدالَّة $f'(x)$.

ب)

$$f'(x) = x(x+b)^3$$

نتذكّر العلاقة ما بين الدَّالّة والمشتقة الأولى والمُشتقّة الثانيَة :

$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$
$g(x)$	$\cup$	التواء	$\cap$	التواء	$\cup$

نُقطة التواء للدَّالّة $f(x)$ في $x=-1$ يعني أنَّ $f''(x)$ تُساوي صفر في $x=-1$.

نجد $f''(x)$:-

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = 1\cdot(x+b)^3 + x\cdot 3\cdot(x+b)^2\cdot 1$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x) = (x+b)^3 + 3x(x+b)^2$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x) = (x+b)^2\left((x+b)+3x\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x) = (x+b)^2(4x+b)$$

$$f''(-1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-1+b)^2(4\cdot(-1)+b)=0$$

$$\Downarrow$$

$$(b-1)^2(b-4)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{b=4},\ \cancel{b=1}$$

$$\downarrow$$

$b>1$ (معطى)

ج)

احداثي x للنُقطتين A و B متساوي . ولهذا نرمز ب x_{AB} الى احداثي x للنُقطة A والنقطة B. حيث أنَّ $\left(-4 < x_{AB} < 1-\sqrt{5}\right)$.

نرمز $y(x_{AB})$ الى طول القطعة الواصلة ما بين النُقطة A و النُقطة B .

$$y(x_{AB})=f(x_{AB})-f'(x_{AB})$$

[لنجد النُقطة القُصوى للدَّالّة $y(x_{AB})$ أي للقطعة AB , نُعمل مُشتَقَّة ونُساويها لصفر]

$$\downarrow$$

$$y'(x_{AB})=f'(x_{AB})-f''(x_{AB})$$

$$y'(x_{AB})=0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x_{AB}) - f''(x_{AB}) = 0$$

$$\left(\begin{gathered} f'(x) = x(x+b)^3 \\ f''(x) = (x+b)^2(4x+b) \\ \color{red}{\boldsymbol{b = 4}} \updownarrow \\ f'(x) = x(x+4)^3 \\ f''(x) = (x+4)^2(4x+4) \end{gathered}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x_{AB}(x_{AB}+4)^3 - (x_{AB}+4)^2(4x_{AB}+4) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x_{AB}+4)^2(x_{AB}(x_{AB}+4) - (4x_{AB}+4)\ ) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x_{AB}+4)^2({x_{AB}}^2 + 4x_{AB} - 4x_{AB} - 4\ ) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x_{AB}+4)^2({x_{AB}}^2 - 4\ ) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x_{AB}+4)^2(x_{AB}+2\ )(x_{AB}-2\ ) = 0$$

$$\downarrow$$

$$x_{AB} = -4$$

$$x_{AB} = 2$$

$$x_{AB} = -2$$

بما أنَّ $\left(-4 < x_{AB} < 1-\sqrt{5}\right)$, فهذا يعني أنَّ $x_{AB} = -2$

هي النُقطة القُصوى الوحيدة في المجال .

الان نتأكَّد أنَّ النُقطة $x_{AB} = -2$ هي نُقطة قُصوى (max) .

$$y''(x_{AB}) = \left(y'(x_{AB})\right)' = \left((x_{AB}+4)^2({x_{AB}}^2-4\,)\right)'$$

$$\Downarrow$$

$$y''(x_{AB}) = 2\cdot(x_{AB}+4)\cdot 1\cdot({x_{AB}}^2-4\,)+(x_{AB}+4)^2\cdot 2x_{AB}$$

$$\Downarrow$$

$$y''(x_{AB}) = 2(x_{AB}+4)({x_{AB}}^2-4\,)+2x_{AB}(x_{AB}+4)^2$$

$$\downarrow$$

$$y''(-2) = 2(-2+4)((-2)^2-4\,)+2(-2)(-2+4)^2$$

$$\Downarrow$$

$$y''(-2) = 2\cdot 2\cdot 0-4\cdot 2^2$$

$$\Downarrow$$

$$y''(-2) = -16$$

بما أنَّ المُشتقَّة الثانيَة قيمتها سالبة في $x = -2$ فهذا يعني أنَّ النُقطة القُصوى في $x = -2$ التابعة للدَّالَّة $y(x_{AB})$ هي نقطة max

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = -2}$$