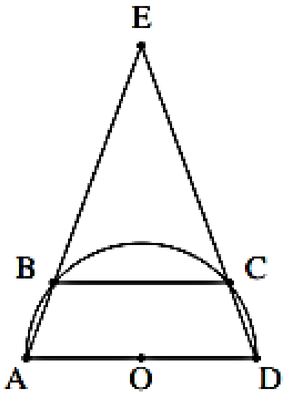
حساب مثلثات شتاء 2017

سؤال 5:



معطى شبه المنحرف ABCD $(BC \parallel AD)$

المحصور في نصف دائرة مركزها O ونصف قطرها R

بحيث يكون AD قطر نصف الدائرة.

امتدادا الساقين AB وَ DC يلتقيان خارج الدائرة

في النقطة E (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\sphericalangle EAD = \alpha$.

أ. عبّر بدلالة R وَ α عن طول القطعة BC.

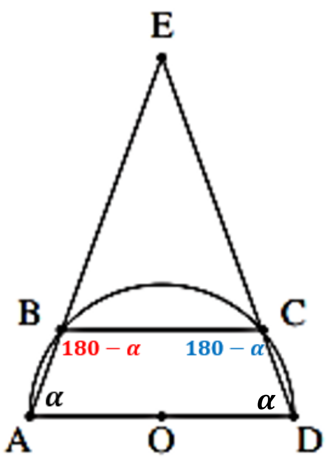
ب. ما هو مجال جميع القيَم الممكنة بالنسبة للزاوية α ؟ علّل.

جـ. معطى أنّ مساحة المثلّث AED هي 9 أضعاف مساحة المثلّث COD .

ما هي النسبة بين نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث AED وبين R ؟

أ)

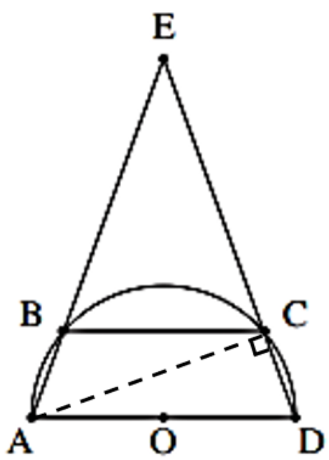
1



زاويتين متقابلتين في شكل رُباعي محصور بدائرة مجموعهما 180

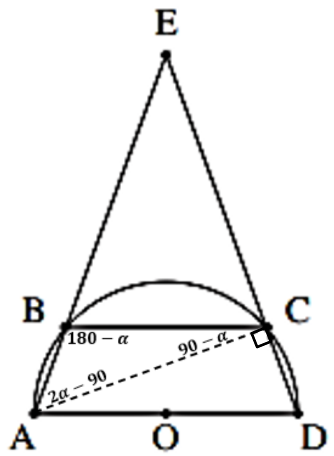
زوايا أحاديّة الجانب مجموعها 180

2



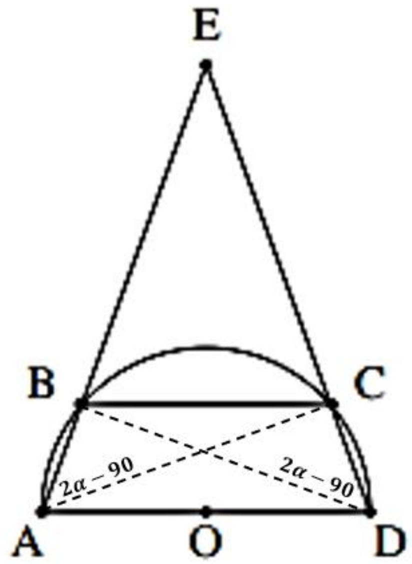
الزاوية المُحيطيّة المُقابل لقُطر الدائرة تُساوي 90

3



مجموع زوايا المُثلّث تُساوي 180

$$\Downarrow$$



زوايا مُحيطيَّة مُقابلة لنفس القوس متساوية

$$\Downarrow$$

$$\frac{BC}{\sin(2\alpha - 90)} = 2R$$

(قانون سينوس العام في المُثلّث ΔBDC)

$$\Downarrow$$

$$BC = 2R \cdot \sin(2\alpha - 90)$$

$\sin(x) = \cos(90 - x)$ $\Downarrow$

$$BC = 2R \cdot \cos\big(90 - (2\alpha - 90)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$BC = 2R \cdot \cos(180 - 2\alpha)$$

$\cos(180 - x) = -\cos(x)$ $\Downarrow$

$$BC = 2R \cdot (-1) \cdot \cos(2\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{BC = -2R \cdot \cos(2\alpha)}$$

ب)

<u>طريقة 1 :</u>

$$\sphericalangle A = \sphericalangle D = \alpha$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle D + \sphericalangle E = 180$$ (مجموع زوايا المثلث ΔADE هي 180)

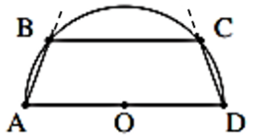
$$\Downarrow$$

$$2\alpha + \sphericalangle E = 180$$

أصغر قيمة ممكنة للزاوية $\sphericalangle E$ تقترب من الصفر

$$\Downarrow$$

أقصى قيمة ممكنة للمقدار α لا يتعدى 90 درجة



مُعطى أنَّ النُقطة E تقع خارج الدائرة

$$\Downarrow$$

أقصى قيمة ممكنة للزاوية $\sphericalangle E$ هي عندما تكون أقرب ما يمكن للدائرة

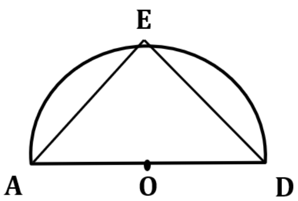
عندما تكون النُقطة E على مُحيط الدائرة تكون قيمة الزاوية $\sphericalangle E$ - 90 درجة (مُقابلة للقطر)

$$\Downarrow$$

قيمة الزاوية $\sphericalangle E$ أقل من 90 درجة

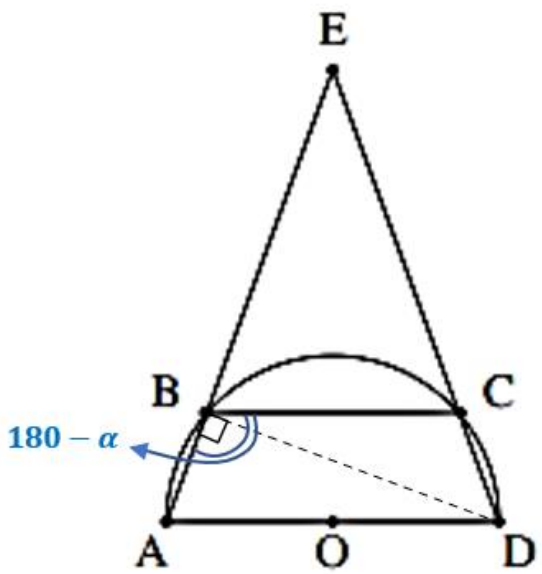
$$\Downarrow$$

قيمة الزاوية $\sphericalangle A$ أكبر من 45 درجة



ينتُج أنَّ : $45° < \alpha < 90°$

طريقة 2 :



$$\sphericalangle ABC > \sphericalangle ABD$$

$$\sphericalangle ABC = 180-\alpha \quad , \quad \sphericalangle ABD = 90 \quad \Longrightarrow \quad 180-\alpha > 90$$

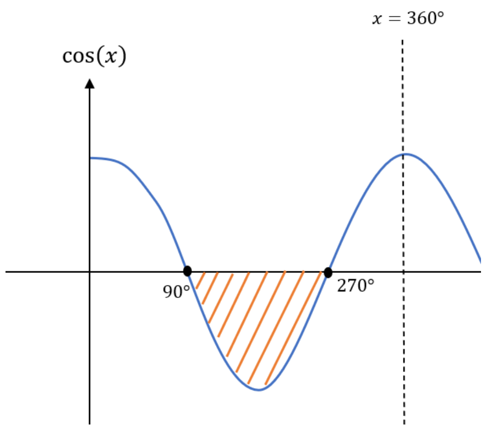
$$\Longrightarrow \quad 180-90 > \alpha \quad \Longrightarrow \quad \boxed{90° > \alpha}$$

وجدنا سابقا أنَّ طول BC هُو $(-2R\cdot\cos(2\alpha))$:

$$\left\{\begin{array}{c} 0 < BC \\ \downarrow \\ 0 < -2R\cdot\cos(2\alpha) \end{array}\right\}$$

$$0 < -2R\cdot\cos(2\alpha) \xrightarrow{\div(-2R)} 0 > \cos(2\alpha) \longrightarrow 90° < 2\alpha < 270°$$

$$\xrightarrow{\div 2} \boxed{45° < \alpha < 135°}$$



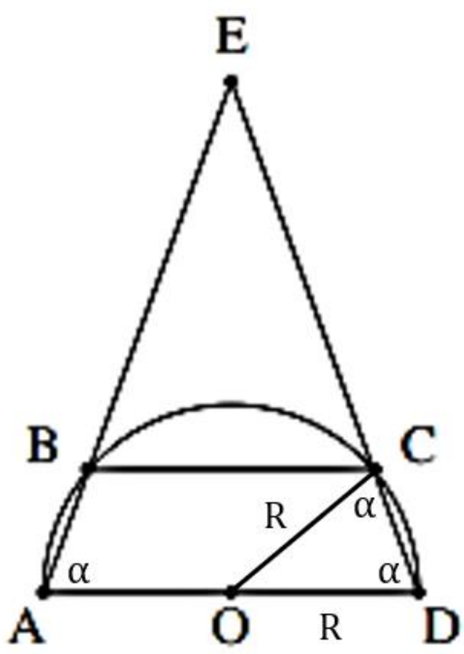
$$90^\circ > \alpha$$

$$45^\circ < \alpha < 135^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{45^\circ < \alpha < 90^\circ}$$

ج)



(ز) $\sphericalangle CDO = \sphericalangle DAE$

(ز) $\sphericalangle DCO = \sphericalangle ADE$

$$\Downarrow$$

(حسب نظريّة التشابُه ز.ز) $\Delta ODC \sim \Delta EAD$

$$\frac{S_{\Delta EAD}}{S_{\Delta ODC}} = \frac{9}{1} \longrightarrow \frac{EA}{OD} = \frac{3}{1} \longrightarrow EA = 3 \cdot OD$$

(نسبة المساحات تربيع النسبة بين الأضلاع)

قانون سينوس العام في المُثلَّث ΔAED :

$$\frac{EA}{\sin(\sphericalangle D)} = 2 \cdot R_{\Delta EAD}$$

$$\Downarrow \; EA = 3 \cdot OD$$

$$\frac{3 \cdot OD}{\sin(\sphericalangle D)} = 2 \cdot R_{\Delta EAD}$$

$$\Downarrow \; OD = R$$

$$\boxed{\frac{3 \cdot R}{\sin(\sphericalangle D)} = 2 \cdot R_{\Delta EAD}}$$

- تبقَّى أن نعرف قيمة $\sin(\sphericalangle D)$.

(من نتائج التشابُه) $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{1} \longrightarrow AD = 3 \cdot DC$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\sphericalangle D) = \frac{DC}{AD} = \frac{1}{3} \longrightarrow \sphericalangle D = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70.5287°$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(\sphericalangle D) = \sin(70.5287) = 0.9428$$

$$\frac{3 \cdot R}{\sin(\sphericalangle D)} = 2 \cdot R_{\Delta EAD} \longrightarrow \frac{3 \cdot R}{0.9428} = 2 \cdot R_{\Delta EAD} \longrightarrow \frac{3 \cdot R}{2 \cdot 0.9428} = R_{\Delta EAD}$$

$$\longrightarrow 1.591 \cdot R = R_{\Delta EAD} \longrightarrow \boxed{\frac{R_{\Delta EAD}}{R} = 1.591}$$