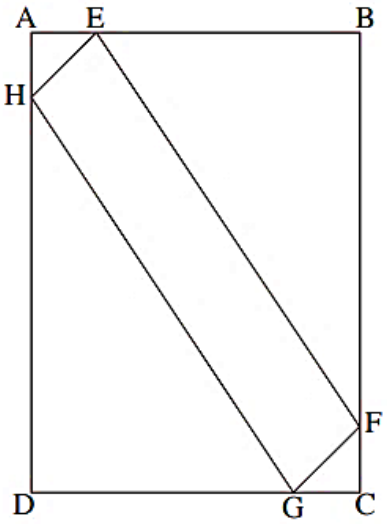
قيم قصوى – صيف 2011

٩. في المستطيل ABCD طول الضلع AD هو 10 سم،
وطول الضلع AB هو a سم.
النقاط E ، F ، G ، H موجودة على أضلاع
المستطيل بحيث AE = AH = CF = CG = x
(انظر الرسم).



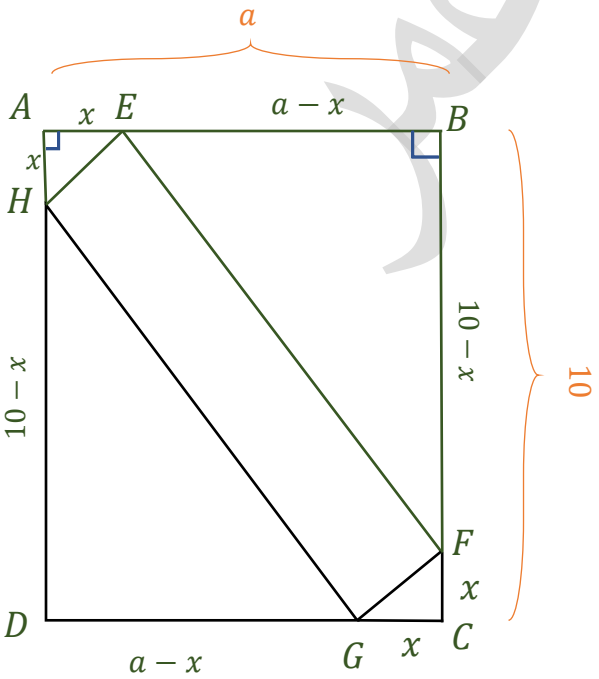
أ. (١) عبّر بدلالة a وَ x
عن مجموع مساحة المثلث
BEF ومساحة المثلث AEH.

(٢) عبّر بدلالة a عن قيمة x التي بالنسبة لها
مساحة الشكل الرباعي EFGH هي أكبر ما يمكن.

ب. عندما تكون مساحة الشكل الرباعي EFGH أكبر ما يمكن، طول القطعة DH
هو 6 سم.
جد قيمة a.

(أ)(1) نعبّر بدلالة x و a

مطلوب: التعبير بدلالة x و a عن مجموع مساحة المثلّثين ΔBEF و ΔAEH



نرمُز: $HD = BF = 10 - x$
$EB = DG = a - x$

في المستطيل كلّ ضلعين متقابلين متساويين،

نحسب مساحة المثلّثين:

$S_{\Delta EBF}$:

$$S_{\Delta EBF} = \frac{EB \cdot BF}{2} = \frac{(a-x)\cdot(10-x)}{2}$$

$$S_{EBF} = \frac{x^2 - ax - 10x + 10a}{2}$$

S_{AEH}:

$$S_{\Delta AEH} = \frac{AE \cdot AH}{2} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

≪ نجمع المساحتين:

$$S_{\Delta AEH} + S_{EBF} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 - ax - 10x + 10a}{2}$$

$$S = \frac{2x^2 - ax - 10x + 10a}{2}$$

(أ)(2) مساحة الشكل الرباعي $EFGH$ أكبر ما يمكن

دالّة الهدف: مساحة الشكل الرباعي $EFGH$ أكبر ما يُمكن.

$S_{\Delta AEH} \cong S_{\Delta CGF}$

$S_{\Delta HDG} \cong S_{EBF}$

هي مثلثات متطابقة حسب ض.ز.ض

$$S_{EFGH} = S_{ABCD} - 2 \cdot (S_{\Delta EBF} + S_{\Delta AEH})$$

$$S_{EFGH} = 10 \cdot a - 2 \cdot \left(\frac{2x^2 - ax - 10x + 10a}{2}\right)$$

$$S_{EFGH} = 10a - 2x^2 + ax + 10x - 10a$$

$$S(x) = -2x^2 + 10x + ax$$

لإيجاد النّقاط القصوى نشتقّ الدالّة:

$$S'(x) = -4x + 10 + a$$

$$S'(x) = 0$$

$$-4x + 10 + a = 0 \longrightarrow 4x = 10 + a$$

$$x = 2.5 + 0.25a$$

للتأكّد أنّ إحداثيّ x الذي وجدناه هو max، **نصنّف النقطة**:

$$S''(x) = -4 \rightarrow (S''(2.5 + 0.25a) < 0)$$

$$\Downarrow$$

$$x_{max} = 2.5 + 0.25a$$

(ب) نجد قيمة a

عندما تكون مساحة الشكل الرباعي $EFGH$ أكبر ما يُمكن => يكون طول القطعة $DH = 6$

أي: عندما $x = 2.5 + 0.25a$ تكون $DH = 6$.

نعوّض $DH = 6$:

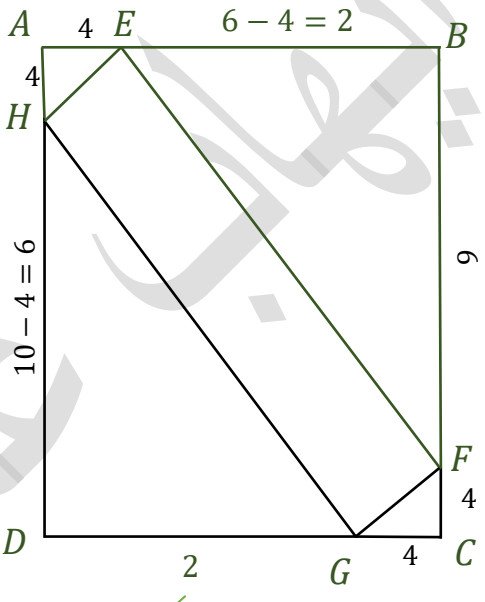
$$DH = 10 - x \longrightarrow 6 = 10 - x \longrightarrow x = 4$$

من بند (أ)(2) وجدنا أنّ $x = 2.5 + 0.25a$

نعوّض:

$$4 = 2.5 + 0.25a \rightarrow 1.5 = 0.25a$$

$$a = 6 \ll$$



نستنتج عزيزي الطالب انّه ولا مرّة منعتمد عالرسم الموجود إلا إذا قلّي استعين فيه!!

الرسم بكون فقط صورة توضيحية ومساعِدة لفهم السّؤال.