

سؤال 7 :

معطاة الدالة $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x - 1$ في المجال $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.

- أ. (1) جد إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين.
 (2) جد إحداثيات النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحدد نوع هذه النقاط.
 (3) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

- ب. أزيح الرسم البياني للدالة $f(x)$ يساراً بـ $\frac{\pi}{2}$ ، بحيث نتجت الدالة $g(x)$ المعرفة في المجال $-\pi \leq x \leq \pi$.
 (1) عبّر عن الدالة $g(x)$ بدلالة الدالة $f(x)$.
 (2) ارسم رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $g(x)$.
 (3) برهن أنّ $g(x)$ هي دالة زوجية.

أمامك 3 تعابير، III-I : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x + \pi) dx$: I $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x + \frac{\pi}{2}) dx$: II $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x - \frac{\pi}{2}) dx$: III
 ج. اذكر أيّ تعبير من التعابير III-I يساوي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.
 علّل إجابتك. لا حاجة للحساب.

(أ)

$$f(x) = 2 \sin(x) + \cos(2x) - 1$$

(1)

تقاطع مع المحور y :

$$f(0) = 2 \sin(0) + \cos(2 \cdot 0) - 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

تقاطع مع محور x :

$$f(x) = 0$$

⇓

$$2 \sin(x) + \cos(2x) - 1 = 0$$

$$(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x) \Downarrow$$

$$2 \sin(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x)) - 1 = 0$$

$$(\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)) \Downarrow$$

$$2 \sin(x) + (1 - 2\sin^2(x)) - 1 = 0$$

\Downarrow

$$2 \sin(x) + 1 - 2\sin^2(x) - 1 = 0$$

\Downarrow

$$2 \sin(x) - 2\sin^2(x) = 0$$

\Downarrow

$$2 \sin(x)(1 - \sin(x)) = 0$$

$\sin(x) = 0$	$1 - \sin(x) = 0$
\Downarrow	\Downarrow
$(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \pi k$	$\sin(x) = 1$
	\Downarrow
	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Downarrow$$

$$x = 0 \quad , \quad x = \pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} &(0, 0) \\ &(\pi, 0) \\ &\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

(2)

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(2x)$$

(نساوي المشقة لصفري) ↓

$$2 \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(2x) = 0$$

⇓

$$2 \cdot (\cos(x) - \sin(2x)) = 0$$

$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ ⇓

$$2 \cdot (\cos(x) - 2 \sin(x) \cos(x)) = 0$$

⇓

$$2 \cdot \underbrace{\cos(x)} \underbrace{(1 - 2 \sin(x))} = 0$$

$$\cos(x) = 0$$

$$1 - 2 \sin(x) = 0$$

↓

↓

($k \in \mathbb{Z}$) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$2 \sin(x) = 1$$

↓

$$\sin(x) = 0.5$$

$x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

↓

↓

$x = \frac{5\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6}$

نتذكر أن مجال x :
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \right)$

x		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$	
$f'(x)$			+	0	-	0	+	0	-		
$f(x)$		min	\nearrow	max	\searrow	min	\nearrow	max	\searrow	min	

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(0) = 2 \cdot \cos(0) \cdot (1 - 2 \sin(0)) = 2 \rightarrow (+) \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 - \sqrt{3} \rightarrow (-) \\ f'\left(\frac{4\pi}{6}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) \cdot \left(1 - 2 \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - 1 \rightarrow (+) \\ f'(\pi) = 2 \cdot \cos(\pi) \cdot (1 - 2 \sin(\pi)) = -2 \rightarrow (-) \end{array} \right.$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - 1 = -4 \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, -4\right) min$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right) max$$

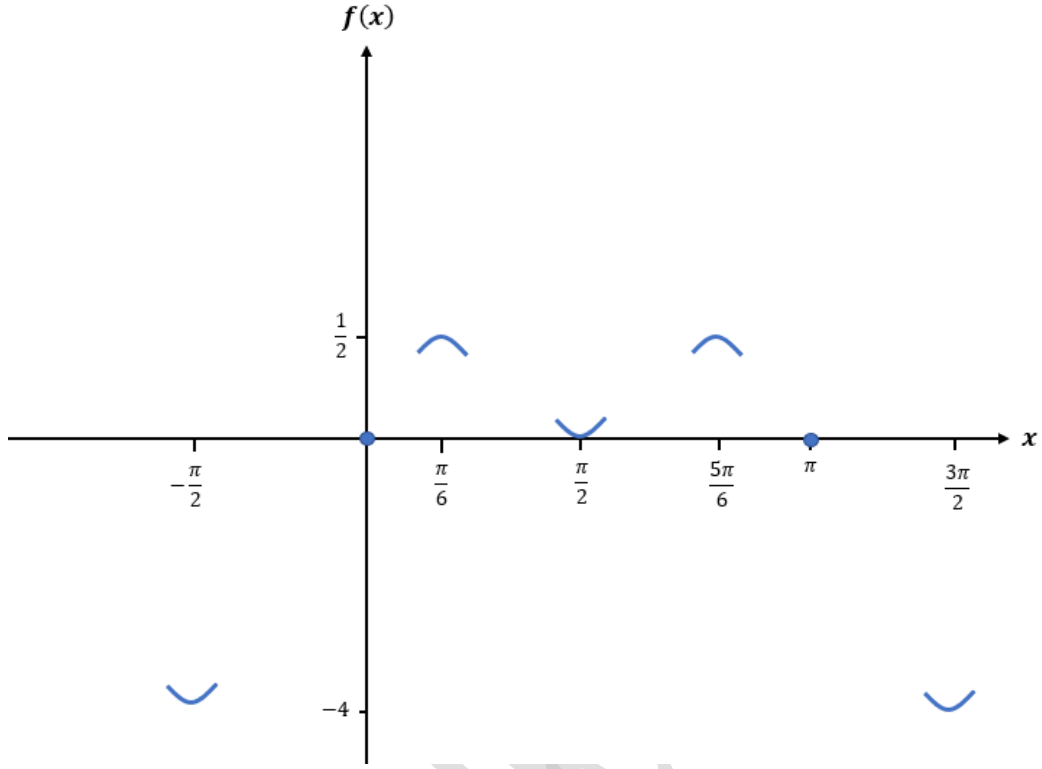
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 1 = 0 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) min$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(2 \cdot \left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right) max$$

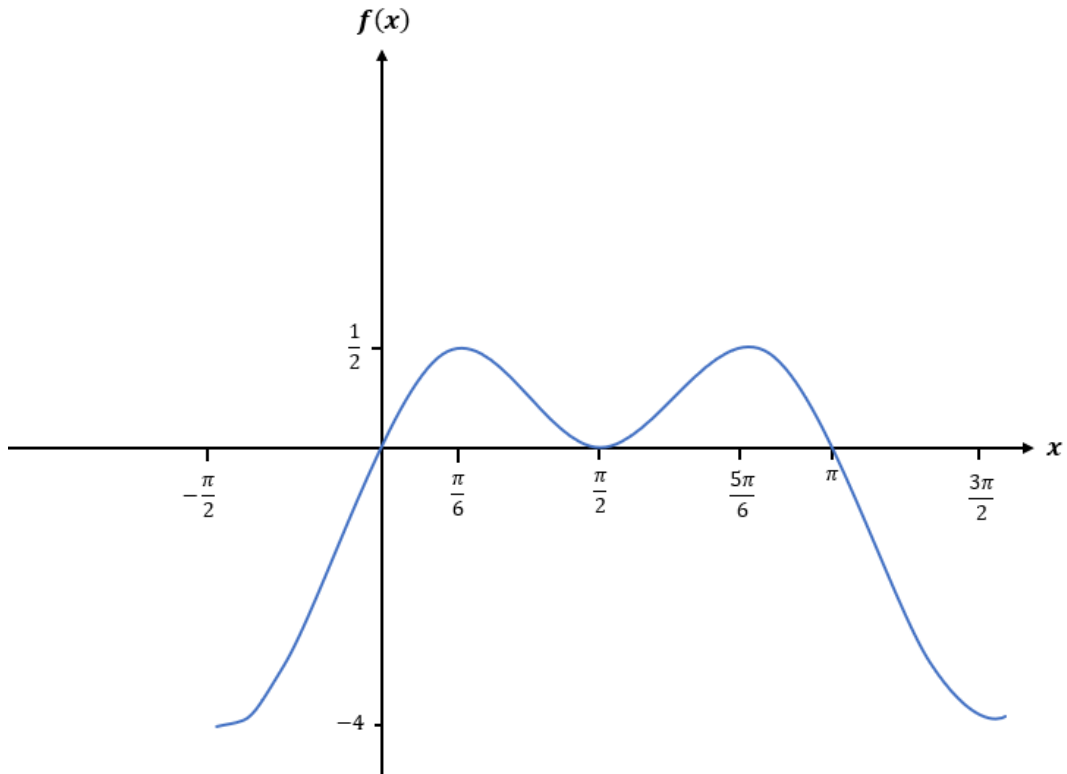
$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) - 1 = -4 \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}, -4\right) min$$

(3)

أولاً نرسم هيكل الدالة : (نضع المعطيات على الرسم)



الآن نرسم الدالة



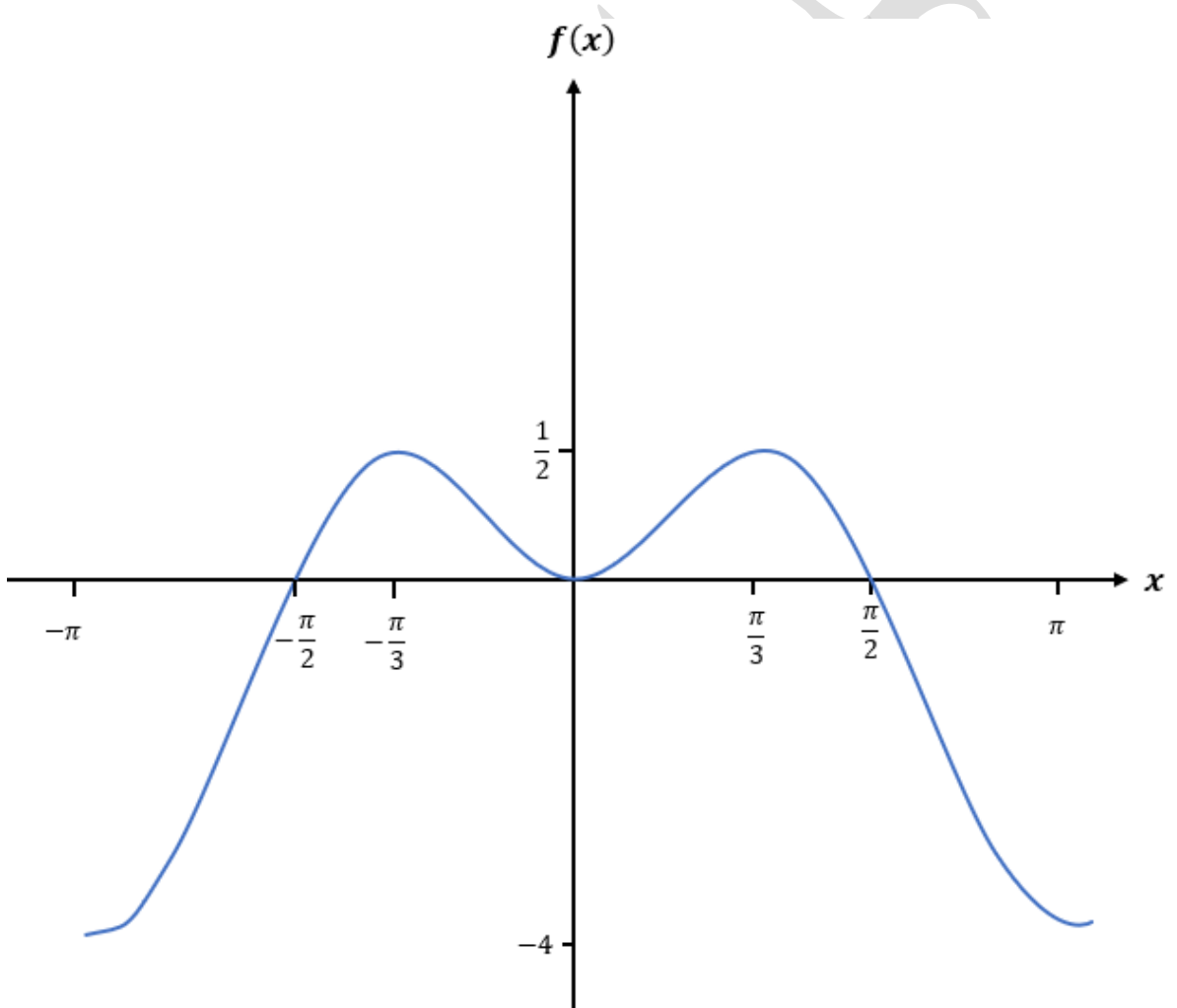
(ب)
(1)

الدالة $g(x)$ هي عبارة عن إزاحة الدالة $f(x)$ الى اليسار بـ $\frac{\pi}{2}$ خطوات

⇓

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

(2)



(3)

كي نُبرهن أنّ الدّالة $g(x)$ هي دالة زوجية نُبرهن أنّ $g(x) = g(-x)$.

نجد $g(x)$:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \\
 &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
 &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{2}\right) - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 2 \cos(-x) - 2 \cos^2(-x) = 2 \cos(x) - 2 \cos^2(x)
 \end{aligned}$$

⇓

$$g(x) = 2 \cos(x) - 2 \cos^2(x)$$

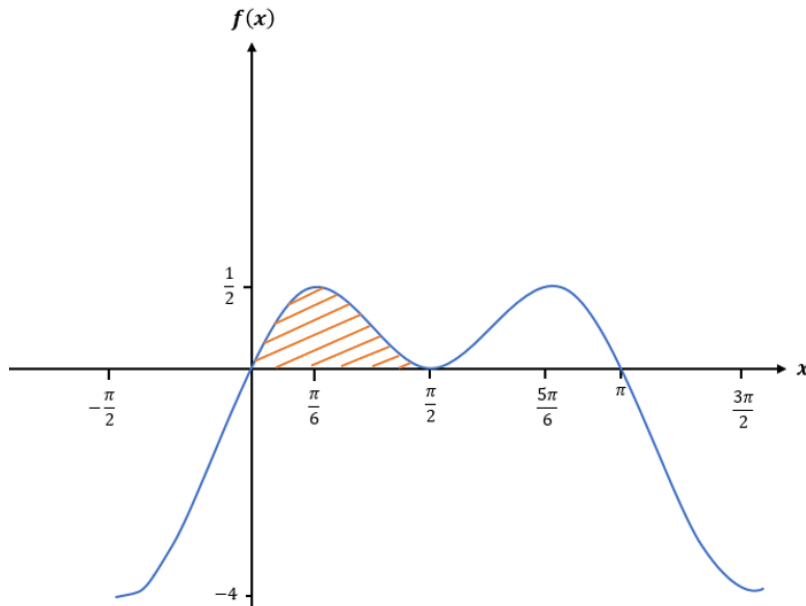
$$g(x) = 2 \cos(x) - 2 \cos^2(x) = 2 \cos(-x) - 2 \cos^2(-x) = g(-x)$$

⇓

$$g(x) = g(-x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{تذكّر:} \\ \cos(x) = \cos(-x) \end{array} \right\}$$

(ج) التعبير $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ يصف المساحة المحصورة بين الدّالة $f(x)$ والمحور x من $x = 0$ وحتى $x = \frac{\pi}{2}$



الدَّالَّة $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ هي عبارة عن إزاحة الدَّالَّة $f(x)$ الى اليسار $\frac{\pi}{2}$ خُطوات .

أي أنّ المساحة المحصورة في الرسم السابق سنُزاح الى اليسار $\frac{\pi}{2}$ خُطوات الى اليسار أيضا , بكلمات أخرى المساحة المحصورة ستكون بين $x = -\frac{\pi}{2}$ و $x = 0$ أي أنّها مُساوية للتعبير $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

ولهذا التعبير || هو التعبير الصحيح .

المعهد إيهاب عمر