قيم قصوى- صيف 2024

8. القطعة AB هي قطر في دائرة نصف قطرها R .

نُشير إلى نقطة C على القطر، ونُشير إلى نقطة D على محيط الدائرة،

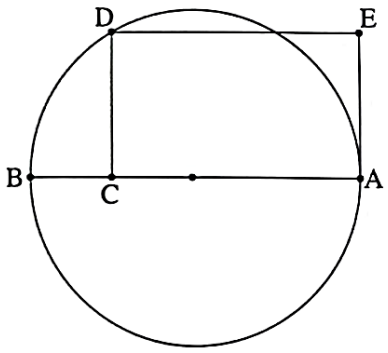
بحيث تكون القطعة CD معامدة للقطعة AB . القطعة AC أكبر من R .

نُمرِّر عبر النقطة D مستقيمًا يوازي القطر AB .

نُمرِّر عبر النقطة A مماسًّا للدائرة.

المستقيم الموازي والمماسّ يتقاطعان في النقطة E .

نرمز: $AC = x$.



أ. عبِّروا بدلالة R عن قيمة x التي بالنسبة لها تكون مساحة المستطيل ACDE أكبر ما يمكن.

النقطة F تقع على الضلع DE .

ب. عبِّروا بدلالة R عن أكبر مجموع ممكن لمساحتَي المثلّثَيْن CDF وَ AFE .

أ) عبروا بدلالة R عن قيمة x التي بالنسبة لها مساحة المستطيل $ABCD$ أكبر ما يمكن

نرمز لمركز الدائرة بـ O

$$AC = x$$

$$CO = AC - AO = x - R$$

ΔDCO:

$$DC^2 + CO^2 = DO^2$$

$$DC^2 + (x - R)^2 = R^2$$

$$DC^2 + x^2 - 2Rx + R^2 = R^2$$

$$DC^2 = 2Rx - x^2$$

$$DC = \sqrt{2Rx - x^2}$$

<u>نبني الدالة التي تمثل مساحة المستطيل $ABCD$</u>

$$f(x) = AC \cdot DC$$

$$f(x) = x \cdot \sqrt{2Rx - x^2}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2Rx - x^2} + x \cdot \frac{2R - 2x}{2\sqrt{2Rx - x^2}}$$

$$\sqrt{2Rx - x^2} + x \cdot \frac{2(R - x)}{2\sqrt{2Rx - x^2}} = 0$$

نضرب بالمقام $\sqrt{2Rx - x^2}$

$$2Rx - x^2 + x(R - x) = 0$$

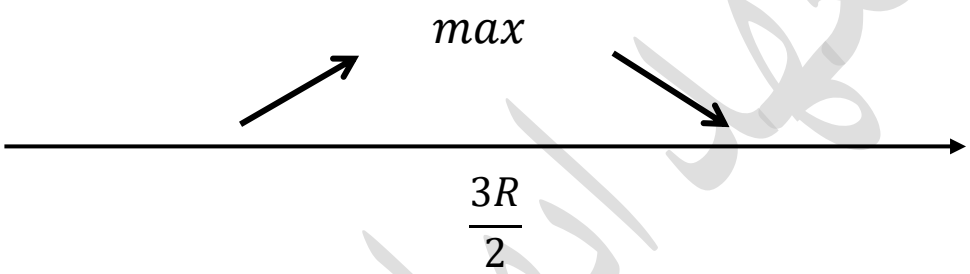
$$2Rx - x^2 + xR - x^2 = 0$$

$$-2x^2 + 3xR = 0$$

$$x(-2x + 3R) = 0$$

$$\cancel{x = 0} \quad 2x = 3R$$

$$x = \frac{3R}{2}$$



$$x_{max} = \frac{3R}{2}$$

معهد إيهاب عمر

ب) عبروا بدلالة R عن أكبر مجموع ممكن لمساحتي المثلثين AFE و CDF

مجموع مساحة المثلثين AFE و CDF تساوي نصف مساحة المستطيل ABCD

$$DC = AE$$

$$S_{\Delta AEF} + S_{\Delta DCF} = \frac{FE \cdot AE}{2} + \frac{DF \cdot DC}{2} = \frac{DC(FE + DF)}{2}$$

$$= \frac{DC \cdot DE}{2} = \frac{\sqrt{2Rx - x^2} \cdot x}{2}$$

نعوض $x = \frac{3R}{2}$

$$DC = x = \frac{3R}{2}$$

$$DE = \sqrt{2Rx - x^2} = \frac{\sqrt{3}R}{2}$$

$$S_{\Delta AEF} + S_{\Delta DCF} = \frac{\frac{3R}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}R}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$$

$$S_{\Delta AEF} + S_{\Delta DCF} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$$