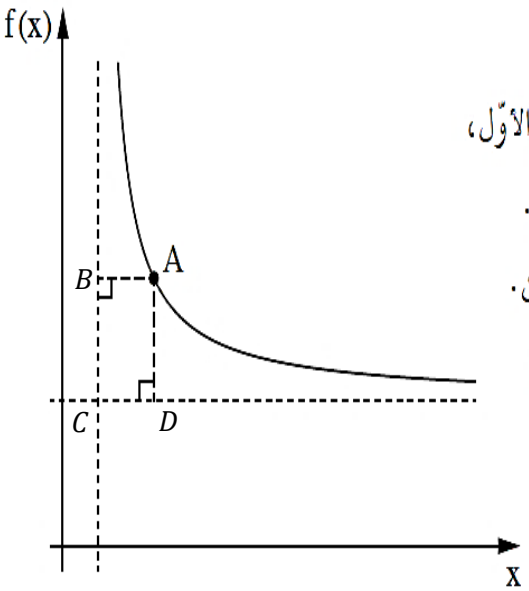
مسائل قصوى صيف موعد ب 2018

سؤال 8:



أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)=\frac{4}{x-1}+3$ في الربع الأوّل.

من النقطة A ، التي تقع على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في الربع الأوّل، مرّروا عمودين لخطّي تقارب الدالّة $f(x)$ ، بحيث تكوّن مستطيل.

أ. جد معادلتَي خطّي تقارب الدالّة $f(x)$ المعامدين للمحورين.

ب. جد إحداثيّات النقطة A التي بالنسبة لها محيط المستطيل هو أصغر ما يمكن.

جـ. احسب مساحة المستطيل الذي محيطه أصغر ما يمكن.

أ) نجد خطوط التقارب العامودية:

*خطوط التقارب العامودية تكون في نقاط عدم التعريف للدالة.

نعوض $x=1$ في الدالة:

$$f(1)=\frac{4}{1-1}+3="\frac{4}{0}"+3$$

عندما عوضنا القيمة نتج ان البسط لا يساوي 0 والمقام يساوي صفر ينتج:

خطوط التقارب العامودية هي:

$$x=1$$

نجد خطوط التقارب الافقية للدالة:

في الكسر قوة البسط اصغر من قوة المقام, وايضا هناك عدد حر, ينتج المحاذية الافقية هي:

$$y=3$$

ب)

نضيف النقاط B, C, D على رسم الدالة.

نرمز لاحداثي x للنقطة A ب t:

$$x_A = t$$

بما ان النقطة A تقع على الدالة, نجد احداثي y للنقطة A, نعوض $x_A = t$:

$$y_A = f(t) = \frac{4}{t-1} + 3$$

$$\boxed{y_A = \frac{4}{t-1} + 3}$$

<u>نحسب طول ضلع المستطيل AB:</u>

بما ان الضلع AB يوازي محور x:

$$AB = x_A - x_B = t - 1$$

$$\boxed{AB = t - 1}$$

<u>نحسب طول ضلع المستطيل AD:</u>

$$AD = y_A - y_D = \frac{4}{t-1} + 3 - 3 = \frac{4}{t-1}$$

$$\boxed{AD = \frac{4}{t-1}}$$

<u>نجد دالة الهدف:</u>

دالة الهدف هي مقدار محيط المستطيل بدلالة t:

$$g(t) = 2 \cdot (AD + AB) = 2 \cdot \left(\frac{4}{t-1} + t - 1\right) = \frac{8}{t-1} + 2t - 2$$

$$\boxed{g(t) = \frac{8}{t-1} + 2t - 2}$$

المطلوب في السؤال **محيط مستطيل** "**اصغر ما يمكن**", أي **نقطة قصوى** نوعها ***min***.

نجد المشتقة $g'(t)$:

$$g'(t) = -\frac{8}{(t-1)^2} + 2$$

نجد النقاط الحرجة للدالة, نطلب $f'(t) = 0$:

$$-\frac{8}{(t-1)^2} + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad -8 + 2t^2 - 4t + 2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$2t^2 - 4t - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} \quad \rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{4} \rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ \cancel{t_2 = -0.5} \end{cases}$$

نشطب $t = -0.5$, لانه معطى ان النقطة A موجودة في الربع الاول أي ان احداثي x موجب.

نجد نوع النقطة الحرجة $t = 3$ بواسطة المشتقة الثانية:

$$g''(t) = \frac{16}{(t-1)^3}$$

نعوض $t = 3$ في المشتقة الثانية:

$$g''(3) = \frac{16}{(3-1)^3} = (+) > 0 \quad \rightarrow \quad min$$

عندما $A = (3,5)$ يكون محيط المستطيل
اصغر ما يمكن

ب)

نجد اطوال المستطيل الذي مساحته اصغر ما يمكن:

$$AB = 2 \quad , \quad AD = 2$$

مساحة المستطيل هي:

$$AD \cdot AB = 2 \cdot 2 = 4$$

معهد إيهاب عمر