أسئلة قصيرة – صيف 2023 موعد ب

أ. برهنوا بواسطة الاستقراء او أي طريقة أخرى ان التساوي الذي امامكم يتحقق بالنسبة لكل n طبيعي:

$$\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\cdots+\frac{A}{2^n}=A\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

A هو بارامتر.

أ. {برهان المطلوب}

مرحلة الفحص:

نفحص الادعاء لـ $n=1$:

$$\frac{A}{2^1}=\frac{A}{2}$$

أي نجمع الى الحد الذي قيمته $\frac{A}{2}$، وهو الحد الأول.

$$\frac{A}{2}=A\left(1-\frac{1}{2^1}\right)$$

$$\frac{A}{2}=\frac{A}{2}$$

$$\Downarrow$$

الادعاء صحيح عندما $n=1$

مرحلة الافتراض:

نفرض ان الادعاء صحيح لـ $n = k$ أي :

$$\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\cdots+\frac{A}{2^k}=A\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$$

مرحلة البرهان:

نبرهن ان الادعاء صحيح لـ $n = k + 1$ أي نبرهن انه:

$$\underbrace{\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\cdots+\frac{A}{2^k}}_{\text{حسب فرضية الاستقراء}}+\frac{A}{2^{k+1}}=A\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

حسب فرضية الاستقراء

$$A\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$$

$$A\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\frac{A}{2^{k+1}}=A\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$A\left(1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\right)=A\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$A\left(1+\frac{-2+1}{2^{k+1}}\right)=A\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$A\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)=A\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

جملة انهاء:

من الفحص رأينا ان الادعاء صحيح لـ $n = 1$ ومن الفرضية ان الادعاء صحيح لـ $n = k$ برهنا ان الادعاء صحيح أيضا لـ $n = k + 1$ لذا فان الادعاء صحيح لكل n طبيعي.

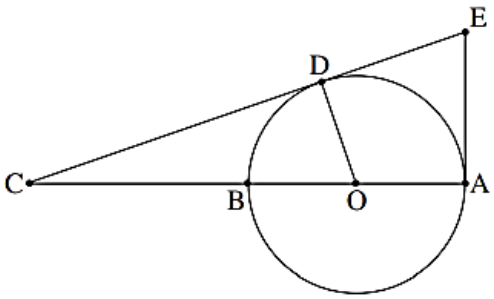
ب. النقطة B هي وسط القطعة AC.

AB هو قطر بالدائرة التي مركزها O ونصف قطرها R.

من النقطة C نمرر مماسا للدائرة يمس الدائرة في النقطة D .

نمرر عبر النقطة A مماسا إضافيا للدائرة.

المماسان يتقاطعان في النقطة E (انظروا الرسم).



(1) برهنوا ان الشكل الرباعي AODE قابل للحصر في دائرة.

(2) عبروا بواسطة R عن نصف قطر الدائرة الحاصرة للشكل الرباعي AODE.

(1) برهان ان الشكل الرباعي AODE قابل للحصر في دائرة

(1) $\measuredangle ODE = 90°$ (الزاوية بين القطر والمماس مساوية لـ 90)

(2) $\measuredangle OAE = 90°$ (الزاوية بين القطر والمماس مساوية لـ 90)

$\Downarrow$

(3) الشكل الرباعي AODE قابل للحصر في دائرة

(شكل رباعي مجموع زوج من الزوايا المتقابلة 180 هو شكل رباعي قابل للحصر في دائرة)

(2) **نعبر عن المطلوب**

(1) $AB = 2R$ (قطر)

(2) النقطة B هي وسط AC (معطى)

$\Downarrow$

(3) $OC = 3R$ (من 1+2)

(4) $OD = R$ (نصف قطر)

(5) $OD^2 + DC^2 = OC^2$ (نظرية فيثاغورس)

(6) $R^2 + DC^2 = 9R^2$

$DC^2 = 8R^2$ (من 3+4+5)

$DC = \sqrt{8}R$

(7) نرمز أن $ED = x$

(8) $ED = EA = x$ (المماسان للدائرة الخارجان من نفس النقطة متساويان)

$\Downarrow$

(9) $CE = \sqrt{8}R + x$ (من 6+8)

(10) $AC = 4R$ (من 1+2)

(11) $AE^2 + AC^2 = CE^2$ (نظرية فيثاغورس)

(12) $x^2 + 16R^2 = \left(\sqrt{8}R + x\right)^2$ (من 8+9+10+11)

$x^2 + 16R^2 = 8R^2 + 2\sqrt{8}Rx + x^2$

$2\sqrt{8}Rx = 8R^2$

$$x = \frac{8R^2}{2\sqrt{8}R} = \sqrt{2}\mathrm{R}$$

معهد إيهاب عمر

$\sphericalangle OAE = 90°$ (13) (من بند أ (2))

$\Downarrow$

OE (14) قطر في الدائرة الحاصرة للشكل (الزاوية المحيطية التي مقدارها 90 تتّكئ على القطر)

$AE^2 + OA^2 = OE^2$ (15) (نظرية فيثاغورس)

$2R^2 + R^2 = OE^2$ (16) (من 8+12+نصف قطر)

$$OE^2 = 3R^2$$

$$OE = \sqrt{3}R$$

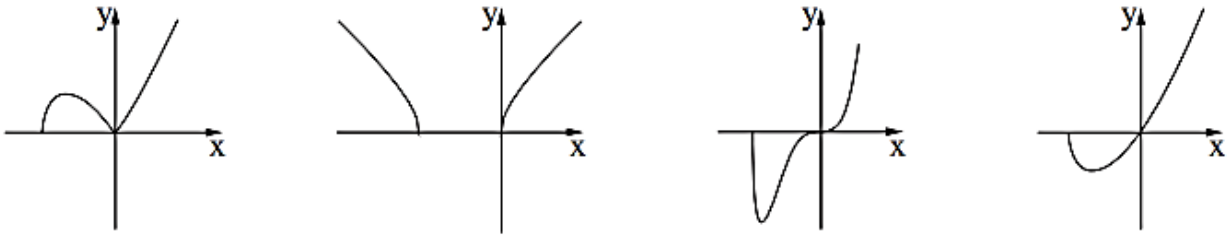
نصف قطر الدائرة الحاصرة للشكل الرباعي AODE $= \frac{OE}{2} = \frac{\sqrt{3}R}{2}$

ج. امامكم 3 دوال و4 رسوم من أ – د. كل واحدة من الدوال تم وصفها في إحدى الرسوم أدناه.

$$f(x) = \sqrt{x^2(x+2)}$$

$$h(x) = \sqrt{x\,(x+2)}$$

$$k(x) = x\sqrt{x+2}$$



الرسم البياني أ　الرسم البياني ب　الرسم البياني ج　الرسم البياني د

(1) حددوا أي رسم يلائم كل واحدة من الدوال المعطاة. عللوا تحديدكم.

معطى الدالة $g(x) = x^n\sqrt{x+2}$. n هو بارامتر طبيعي أكبر من 1.

(2) جدوا بالنسبة لاي قيم n ، الرسم البياني المتبقي يلائم الدالة $g(x)$.

(1) **أي رسم يلائم كل واحدة من الدوال**

نجد مجال تعريف الدوال:

$f(x)$:

$$x^2(x+2) \geq 0$$

$$x+2 \geq 0 \quad x^2 \geq 0 \text{ (دائما)}$$

$$x \geq -2$$

الدالة $f(x) = \sqrt{x^2(x+2)}$ دائما موجبة أو تساوي صفر. لذا، نشطب الرسم أ و ب.
الرسم البياني الذي يحقق مجال التعريف هو الرسم البياني د.

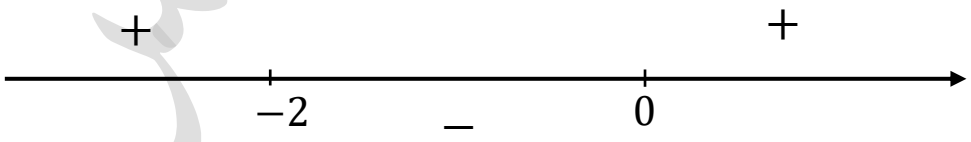
$f(x)$ تلائم **الرسم البياني د.**

$h(x)$:

$$x\,(x+2) \geq 0$$

$$x\,(x+2) = 0$$

$$x = 0 \quad x = -2$$



$$x \leq -2 \text{ أو } x \geq 0$$

الرسم البياني الوحيد الذي يحقق هذا المجال هو **الرسم البياني ج**

$h(x)$ تلائم **الرسم البياني ج.**

k(x):

يمكننا ان نرى ان الدالة $f(x) = \sqrt{k^2(x)}$.

$$f(x) = |k(x)| \Leftarrow$$

من هنا، وبالنظر الى رسمة $f(x)$، نستنتج ان الرسم أ يلائم الدالة k(x).

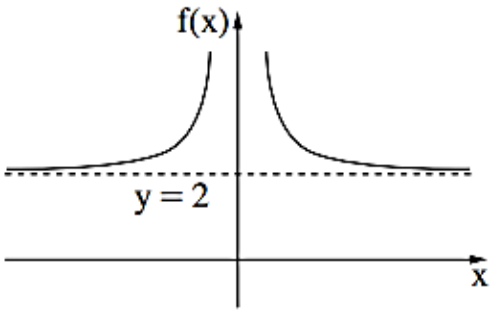
k(x) تلائم **الرسم البياني** أ.

معهد ايهاب عمر

د. امامكم الرسم البياني للدالة $f(x)$ المعرفة لكل $x \neq 0$.

المستقيمان $x = 0 , y = 2$ هما خطوط نقارب للدالة $f(x)$.

الدالة $f(x)$ مقعرة الى الأعلى في كل مجال تعريفها.



(1) ارسموا رسما تقريبا لدالة المشتقة $f'(x)$.

(2) حددوا مجالات تصاعد وتنازل دالة المشتقة $f'(x)$. (إذا وجدت).

معطى: $a > 0$ هو بارامتر.

(3) رتبوا التعابير الاتية (1) – (4) من الأصغر الى الأكبر.

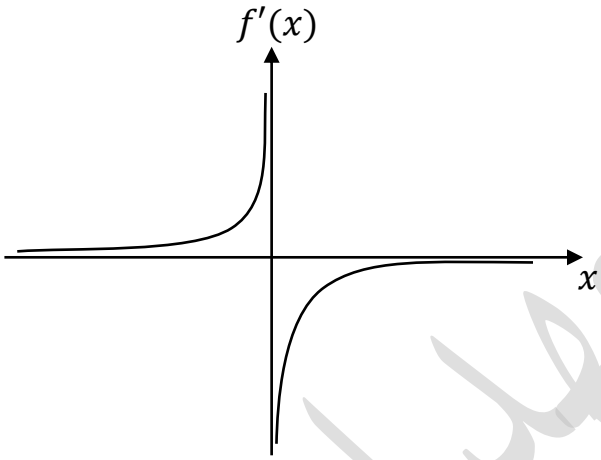
(اكتبوا في الجهة اليسرى رقم التعبير الأصغر وهكذا دواليك).

(1) $\int_a^{a+1} f(x)dx$, (2) $\int_{a+1}^{a+2} f(x)dx$, (3) $\int_a^{a+1} f'(x)dx$, (4) العدد 2

(1) رسم تقريبي لدالة المشتقة $f'(x)$

حسب علاقة الدالة والمشتقة، عندما تكون الدالة تصاعدية، تكون المشتقة موجبة (فوق محور x). عندما تكون الدالة تنازلية، تكون المشتقة سالبة (تحت محور x).

$\Downarrow$



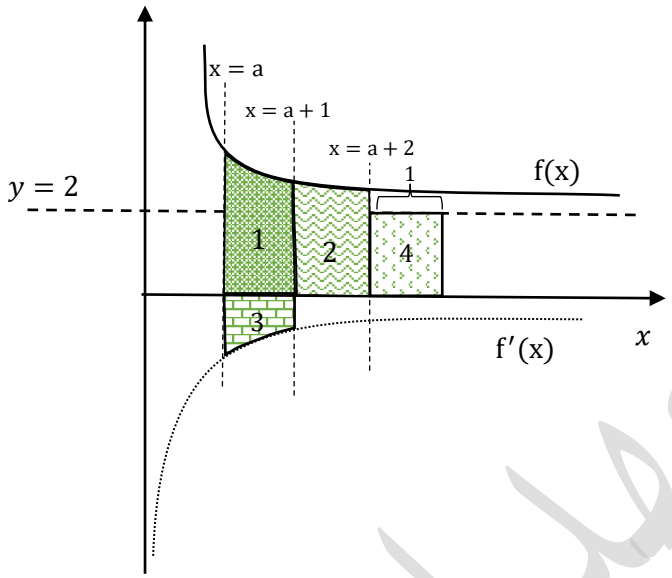
(2) مجالات تصاعد وتنازل لدالة المشتقة $f'(x)$

من الرسم في البند السابق، نرى أن الدالة تصاعدية في كل مجال تعريفها.

$\Leftarrow$ الدالة تصاعدية لكل $x \neq 0$

معهد ايهاب عمر

(3) رتبوا التعابير الاتية من الأصغر الى الأكبر



$\Leftarrow \int_a^{a+1} f'(x)dx$ سالب بالتأكيد، وذلك لان المساحة 3 تقع تحت محور x وسقفها أيضا هو محور x.

بما ان المحاذية الافقية لـ $f(x)$هي $y = 2$ والبعد بين حدود التكامل هو 1، لذا، نستطيع ان نكوّن مستطيل (المساحة 4) عرضه 1 وارتفاعه 2، أي ان مساحته تساوي 2.

وبما ان الرسم البياني للدالة $f(x)$ يقع فوق المحاذية، فإن التعبيرين 1 و 2 قيمتهما اكبر من 2.

وكلما اقتربنا من المحاذية الافقية أكثر كلما صغرت المساحة أي:

$$\int_a^{a+1} f(x)dx > \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx > 2$$

$$\Downarrow$$

$$3 < 4 < 2 < 1$$