أعداد مُركبة صيف 2018

سُؤال 3:

z_1 وَ z_2 هما عددان مركّبان يحقّقان : $|z_1|=|z_2|=r$ ، $\arg z_1+\arg z_2=90^o$.

أ. برهن أنّ نتيجة حاصل الضرب $z_1 \cdot z_2$ هي عدد وهميّ نقيّ ، وعبّر عنه بدلالة r .

النقاط A وَ B وَ C في مستوى جاوس تمثّل بالتلاؤم الأعداد المركّبة z_1 وَ z_2 وَ z_3 .

معطى أنّ : النقاط A وَ B وَ C لا تقع على مستقيم واحد، والنقطة C تقع على المستقيم $y=x$.

ب. فسّر لماذا المثلّث ABC هو مثلّث متساوي الساقين.

النقطة D في مستوى جاوس تلائم العدد المركّب $z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)^2$.

معطى أنّ : $z_1+z_2=7+7i$

$z_1-z_2=1-i$

$(z_3)^2=2i$

جـ. (1) جد إحداثيّات النقطتين C وَ D (جد الإمكانيّتين).

(2) احسب مساحة الشكل الرباعيّ BDAC بالنسبة للنقطة C الموجودة في الربع الأوّل.

أ)

$$z_1=r\,\text{cis}(\arg z_1)$$

$$z_2=r\,\text{cis}(\arg z_2)$$

$$z_1 \cdot z_2=r^2\,\text{cis}(\arg z_1+\arg z_2)=r^2\,\text{cis}(90°)=\underbrace{r^2 i}_{\text{عدد وهمي نقي}}$$

ب)

النُقطة C تقع على المُستقيم $y=x$ أي أنَّ $\text{Re}(z_C)=\text{Im}(z_C)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z_C=a+ai}$$ (a هُو عدد حقيقي)

$$\Downarrow$$

$$C\,(a\,,a)$$

نرمُز : $\arg(z_1) = \theta$ و $\arg(z_2) = 90 - \theta$.

$$z_1 = r\,cis(\arg z_1) = r\,cis(\theta) = \underbrace{r\cos(\theta)}_{m} + i\underbrace{r\sin(\theta)}_{n} \implies A\,(m\,,n)$$

$$z_2 = r\,cis(\arg z_2) = r\,cis(90-\theta) = r\cos(90-\theta) + ir\sin(90-\theta)$$

$$= \underbrace{r\sin(\theta)}_{n} + i\underbrace{r\cos(\theta)}_{m} \implies B\,(n\,,m)$$

استعملنا القانون :

$\sin(90-\theta) = \cos(\theta)$

$\cos(90-\theta) = \sin(\theta)$

رمزنا :

$r\sin(\theta) = n$

$r\cos(\theta) = m$

$C\,(a\,,a)$

$A\,(m\,,n)$

$B\,(n\,,m)$

$$AC = \sqrt{(a-m)^2 + (a-n)^2}$$

$$BC = \sqrt{(a-n)^2 + (a-m)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$AC = BC$$

$$\Downarrow$$

المُثلَّث ΔABC هو مُثلَّث مُتساوي الساقين

إيهاب عمر

ج) (1)

$$① \quad z_1 + z_2 = 7 + 7i$$

$$② \quad z_1 - z_2 = 1 - i$$

$$\{ ① + ② \}$$

$$(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2) = (7 + 7i) + (1 - i)$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 + z_2 + z_1 - z_2 = 7 + 7i + 1 - i$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot z_1 = 8 + 6i$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 = 4 + 3i$$

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \quad , \quad \arg(z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87°$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z_1 = 5\,\mathrm{cis}(36.86°)}$$

$$① \quad z_1 + z_2 = 7 + 7i \longrightarrow 4 + 3i + z_2 = 7 + 7i \longrightarrow z_2 = 3 + 4i$$

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad , \quad \arg(z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13°$$

بالمُناسبة , نستنتج أنَّ $r = 5$ أيضاً

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z_2 = 5\,\mathrm{cis}(53.13°)}$$

$$(z_3)^2 = 2i$$

$$\Downarrow$$

$$(z_3)^2 = 2\ \text{cis}(90)$$

$$\Downarrow$$

$$z_3 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{90 + 360k}{2}\right) = \sqrt{2}\ \text{cis}(45 + 180k) \quad \mathbf{(k = 0, 1)}$$

امكانيَّة 1

$$z_3 = \sqrt{2}\ \text{cis}(45°)$$

$$\downarrow$$

$$z_3 = \sqrt{2}\cos(45°) + i\sqrt{2}\sin(45°) = 1 + i$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{C\,(1\,,1)}$$

$$z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)^2$$

$$\downarrow$$

$$(1 + i) \cdot (r^2 i)^2$$

$$\mathbf{r = 5}\ \downarrow$$

$$(1 + i) \cdot (5^2 i)^2$$

$$\downarrow$$

$$(1 + i) \cdot (-625)$$

$$\downarrow$$

$$-625 - 625i$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{D\,(-625, -625)}$$

امكانيَّة 2

$$z_3 = \sqrt{2}\ \text{cis}(225°)$$

$$\downarrow$$

$$z_3 = \sqrt{2}\cos(225°) + i\sqrt{2}\sin(225°) = -1 - i$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{C\,(-1\,, -1)}$$

$$z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)^2$$

$$\downarrow$$

$$(-1 - i) \cdot (r^2 i)^2$$

$$\mathbf{r = 5}\ \downarrow$$

$$(-1 - i) \cdot (5^2 i)^2$$

$$\downarrow$$

$$(-1 - i) \cdot (-625)$$

$$\downarrow$$

$$625 + 625i$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{D\,(625\,, 625)}$$

(2)

$$z_1 = 4 + 3i \longrightarrow A(4,3)$$

$$z_2 = 3 + 4i \longrightarrow B(3,4)$$

$$C(1,1)$$

$$D(-625,-625)$$

✓ نجد ميل AB :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-4}{4-3} = \frac{-1}{1} = -1 \longrightarrow m_{AB} = -1$$

✓ نجد ميل DC :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-625-1}{-625-1} = \frac{-626}{-626} = 1 \longrightarrow m_{DC} = 1$$

نستنتج أنَّ AB يُعامِد DC وذلك لأنَّ $m_{AB} \cdot m_{DC} = -1$.

$$S_{\text{شكل رُباعي}} = \frac{(\text{قطر }1)\cdot(\text{قطر }2)\cdot \sin(\alpha)}{2}$$

α هي الزاوية المحصورة بين القُطرين

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_{BDAC} = \frac{AB \cdot DC \cdot \sin(90)}{2}}$$

نجد AB :

$$AB = \sqrt{(4-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

نجد DC :

$$DC = \sqrt{(-625-1)^2 + (-625-1)^2} = \sqrt{783752}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{BDAC} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{783752} \cdot \sin(90)}{2} = \frac{1252}{2} = 626$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{626 \text{ وحدات طول}}$