# دوال جذرية – 2023 صيف خاص

**7.** معطاة الدالّة $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ .

أ. **(1)** جدوا مجال تعريف الدالّة $f(x)$ .

**(2)** جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور $x$ (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

**(3)** جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$ .

**(4)** جدوا مجالات التقعُّر باتّجاه الأعلى $(\cup)$ وباتّجاه الأسفل $(\cap)$ للدالّة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

ب. ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$ .

معطاة الدالّة $h(x)=-f(-x)$ . الدالّتان $f(x)$ وَ $h(x)$ معرَّفتان في نفس المجال.

جـ. في نفس هيئة المحاور التي رسمتم فيها الرسم البيانيّ التقريبيّ للدالّة $f(x)$ ، أضيفوا بخطّ متقطّع رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $h(x)$.

معطى أنّ: $a>3$ هو بارامتر.

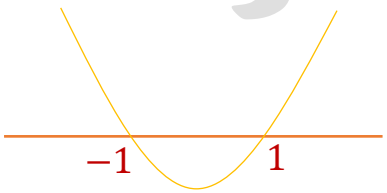
د. رتِّبوا التعابير **I–III** التي أمامكم من الأصغر إلى الأكبر (اكتبوا في الجهة اليسرى رقم التعبير الأصغر وهكذا).

**I.** $\int_{a}^{a+1}(f(x)-h(x))dx$ **II.** $\int_{a+1}^{a+2}(f(x)-h(x))dx$ **III.** $\int_{-a+1}^{-a+2}(f(x)-h(x))dx$

## أ) (1) مجال تعريف $f(x)$

$$f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$$

$$x^2-1\geq 0$$




$$x^2\geq 1$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

$$x\geq 1\,,x\leq -1$$

## أ) (2) تقاطع $f(x)$ مع المحاور

**مع محور $x$:**

$$0 = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$-x = \sqrt{x^2 - 1} \quad ( )^2$$

$$x^2 = x^2 - 1 \rightarrow 0 = -1 \quad \emptyset$$

لا يوجد

**مع محور $y$:**

$$f(0) = 0 + \sqrt{0^2 - 1}$$

$$\emptyset$$

لا يوجد

## أ) (3) تصاعد وتنازل $f(x)$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

$$1 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = -x \quad ( )^2$$

$$x^2 - 1 = x^2 \rightarrow 0 = 1 \quad \emptyset$$

النقاط القصوى هي أطراف المجال فقط:

| | $-2$ | $-1$ | - | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | - | | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $min$ | - | $min$ | ↗ |

تصاعد: $x > 1$

تنازل: $x < -1$

## أ) (4) تقعر لأعلى وأسفل

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

نطلب $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2-1} \cdot \frac{-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} =$$

مقام مشترك يا وحش

$$= \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$(-)$ $(+)$ $(+)$

كما نرى، المقام دائمًا موجب، والبسط دائمًا سالب، أي قيمة $f''(x)$ دائمًا سالبة، لذلك الدالة $f(x)$ مقعرة لأسفل لكل $x$ في المجال

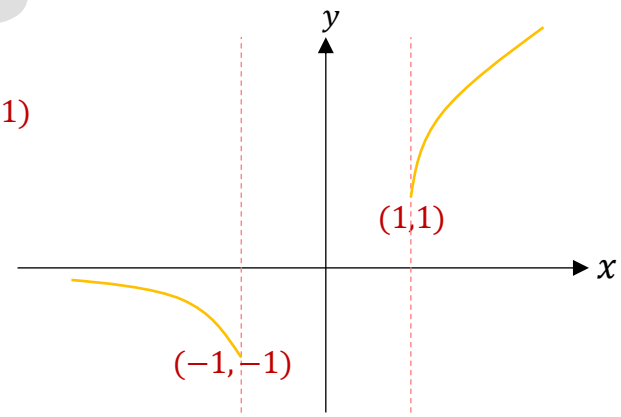
تقعر لأعلى : لا يوجد

تقعر لأسفل : $x > 1 \, , x < -1$

## ب) رسم $f(x)$

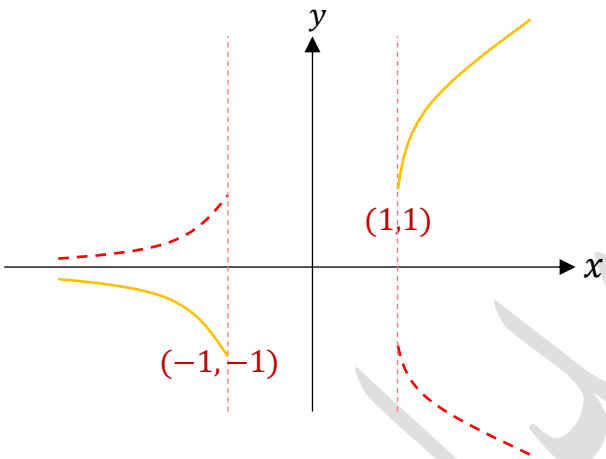
$f(1) = 1 \;\; (1,1)$

$f(-1) = -1 \;\; (-1,-1)$



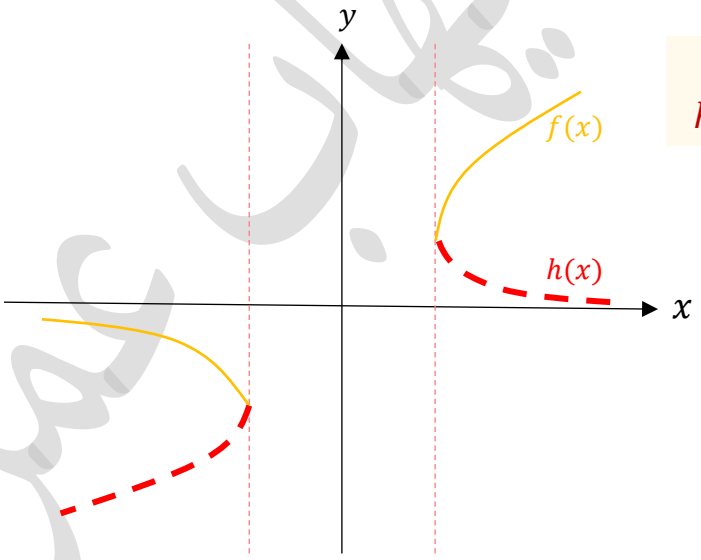
## ج) رسم $h(x)$

$$h(x) = -f(-x)$$




*لتسهيل الحل* بدايةً نرسم

$$h(x) = -f(x)$$



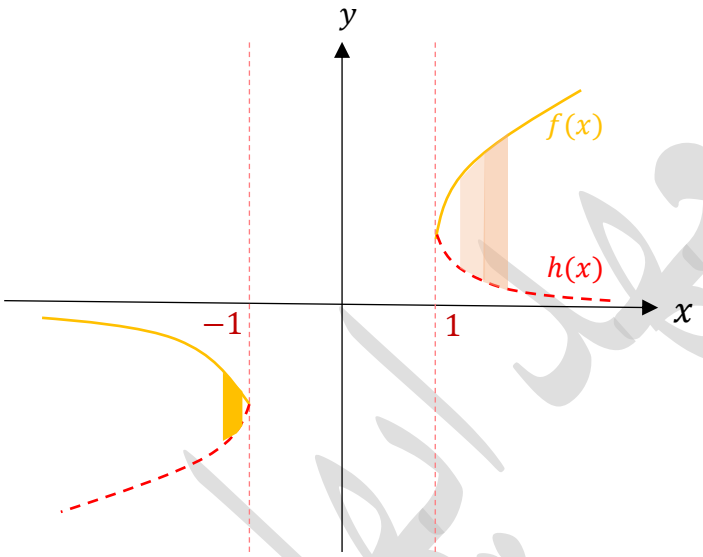

الآن نرسم

$$h(x) = -f(-x)$$

معهد ايهاب عمر

## د) ترتيب التعابير

**I.** $\int_{a}^{a+1} (f(x)-h(x))dx$ **II.** $\int_{a+1}^{a+2} (f(x)-h(x))dx$ **III.** $\int_{-a+1}^{-a+2} (f(x)-h(x))dx$




$a > 3$

طريقة 1: كما نرى عزيزي الطالب، كلما كبر الـ $x$ في المجال $x > 1$ كبرت المساحة المحصورة بين الدالتين، أي كلما بعد المجال عن نقطة التقاء الدالتين كبرت المساحة، من هنا فإن قيمة التعبير II أكبر من I.

المجال في III هو أقرب مجال لنقطة التقاء الدالتين (لاحظوا أن الرسمين في الجهة الموجبة والسالبة لمحور $x$ متماثلين)، لذا فهو الأصغر

الجواب :

$III < I < II$

وصلت نهاية السؤال يا مجتهد ☺