دوال مُثلَّثيَّة صيف 2014

سؤال 6 :

معطاة الدالّتان : $f(x)=2\sin^2 x$ ، $g(x)=\sin(2x)$ ، في المجال $0\le x\le \pi$.

أ. في المجال المعطى، جد :

(1) الإحداثيّات x لنقاط التقاطع بين الرسمين البيانيّين للدالّتين.

(2) نقاط تقاطع كلّ واحدة من الدالّتين مع المحور x .

ب. (1) معطاة الدالّة $h(x)=x-\frac{\sin(2x)}{2}$.

بيّن أنّ $h'(x)=f(x)$.

(2) في المجال $0\le x\le \pi$ ، جد المساحة المحصورة بين الرسمين البيانيّين للدالّتين $f(x)$ وَ $g(x)$.

أ)

(1)

$$g(x)=f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(2x)=2\sin^2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=2\sin^2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$2\sin^2(x)-2\sin(x)\cos(x)=0$$

$$\Downarrow$$

$$2\sin(x)\cdot(\sin(x)-\cos(x))=0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(x) - \cos(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(x) = \cos(x)$$

$$\div \cos(x) \Downarrow$$

$$\tan(x) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(0 \leq x \leq \pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = 0 \quad , \quad x = \frac{\pi}{4} \quad , \quad x = \pi}$$

(2)

- تقاطُع الدَّالَّة $f(x)$ مع المحور x :

$$f(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2\sin^2(x) = 0$$

$$\div 2 \Downarrow$$

$$\sin^2(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

معهد إيهاب عمر

$(0 \le x \le \pi) \Downarrow$

$$x = 0 \ , \ x = \pi$$

$$\Downarrow$$

$$(0,0) \ , \ (\pi,0)$$

- تقاطُع الدَّالَّة $g(x)$ مع المحور x :

$$g(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(2x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x = \pi k$$

$\div 2 \Downarrow$

$$x = \frac{\pi k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$(0 \le x \le \pi) \Downarrow$

$$x = 0 \ , \ x = \frac{\pi}{2} \ , \ x = \pi$$

$$\Downarrow$$

$$(0,0) \ , \ \left(\frac{\pi}{2},0\right) \ , \ (\pi,0)$$

ب) (1)

$$h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\downarrow$$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 1 - \cos(2x) = 1 - (\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$= 1 - (1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)) = 1 - 1 + 2\sin^2(x) = 2\sin^2(x) = f(x)$$

معهد إيهاب عمر

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$h'(x) = f(x)$$

استعملنا في البُرهان المُتطابقة التالية :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

(2)

يوجد بين الدَّالتين $f(x)$ و $g(x)$ ثلاثة تقاطُعات في $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \pi$

- نفحص أي الدوال أكبر في المجال $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$:

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.292$$

$$g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = 0.707$$

$$\Downarrow$$

$g(x)$ أكبر من $f(x)$ في المجال $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

- نفحص أي الدوال أكبر في المجال $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$f(x)$ أكبر من $g(x)$ في المجال $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$

المساحة المحصورة بين الرسمين $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(2x) - 2\sin^2(x))\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (2\sin^2(x) - \sin(2x))\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(\sin(2x) - h'(x)\big)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (h'(x) - \sin(2x))\,dx$$

$$= \left[\frac{-\cos(2x)}{2} - h(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[h(x) + \frac{\cos(2x)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= \left[\frac{-\cos(2x)}{2} - \left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) + \frac{\cos(2x)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$\left\{ \left[\frac{-cos(2x)}{2} - \left(x - \frac{sin(2x)}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{-cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)\right) - \left(\frac{-cos(0)}{2} - \left(0 - \frac{sin(0)}{2}\right)\right) \right.$$

$$\left. \left(-0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$\left\{ \left[\left(x - \frac{sin(2x)}{2}\right) + \frac{cos(2x)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \left(\left(\pi - \frac{sin(2\pi)}{2}\right) + \frac{cos(2\pi)}{2}\right) - \left(\left(\frac{\pi}{4} - \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right) + \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right) \right.$$

$$\left. \left(\pi + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + 0\right) = \pi + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3\pi}{4} \right\}$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \big(g(x)-f(x)\big)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \big(f(x)-g(x)\big)\,dx = 1-\frac{\pi}{4}+1+\frac{3\pi}{4} = 2+\frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

المساحة المحصورة بين الرسمين $= 2+\frac{\pi}{2}$

معهد إيهاب عمر