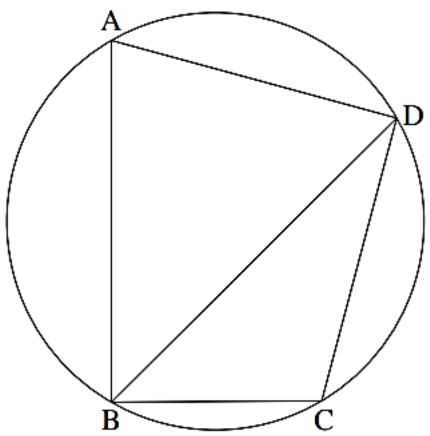
إيهاب عمر

حساب مثلثات صيف 2022

سؤال 5:



الشكل الرباعيّ ABCD محصور في دائرة نصف قطرها R ومركزها O (انظروا الرسم).

نرمز: $\alpha = \sphericalangle DAB$ ، α هي زاوية حادّة.

أ. عبِّروا عن طول قطر الشكل الرباعيّ BD بدلالة α وَ R .

معطى أنّ: $BC = R$ ، $CD = R\sqrt{2}$.

ب. احسبوا α .

معطى أنّ: BD هو منصِّف الزاوية ABC.

جـ. احسبوا مقدار الزاوية ABD.

نرمز بِـ h_1 إلى الارتفاع النازل من الرأس A في المثلّث ABD ، وَبِـ h_2 إلى الارتفاع النازل من الرأس O في المثلّث BOD.

د. احسبوا $\frac{h_1}{h_2}$.

أ)

$$\frac{BD}{\sin(\sphericalangle BAD)} = 2R$$ (قانون سينوس العام)

$$\Downarrow$$

$$\frac{BD}{\sin(\alpha)} = 2R$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{BD = 2R \cdot \sin(\alpha)}$$

ب)

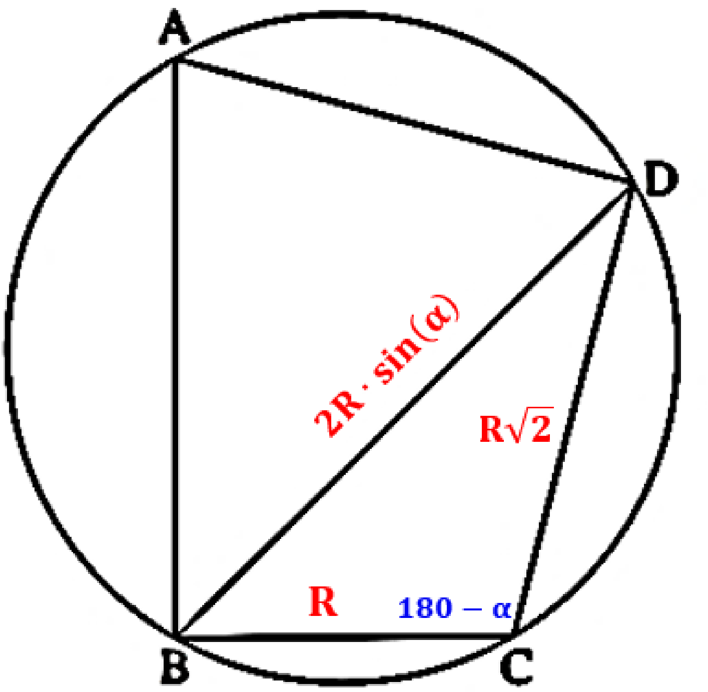
$$BC = R$$

$$CD = R\sqrt{2}$$

$$BD = 2R \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sphericalangle BCD = 180 - \alpha$$

(الزوايا المُتقابلة في الشكل الرُباعي المحصور في دائرة مجموعها 180°)



$$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2 \cdot DC \cdot BC \cdot \cos(\sphericalangle BCD)$$

$$\Downarrow$$

$$(2R \cdot \sin(\alpha))^2 = (R)^2 + \left(R\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot R\sqrt{2} \cdot R \cdot \cos(180 - \alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$4R^2 \cdot \sin^2(\alpha) = R^2 + 2R^2 - 2\sqrt{2} \cdot R^2 \cdot \cos(180 - \alpha)$$

$$\div R^2 \Downarrow$$

$$4\sin^2(\alpha) = 1 + 2 - 2\sqrt{2} \cdot \cos(180 - \alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) \Downarrow$$

$$4 \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) = 3 + 2\sqrt{2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$4 - 4\cos^2(\alpha) = 3 + 2\sqrt{2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$4\cos^2(\alpha) + 2\sqrt{2} \cdot \cos(\alpha) - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{24}}{8}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-2\sqrt{2} + \sqrt{24}}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\alpha) = 0.258$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 75°$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-2\sqrt{2} - \sqrt{24}}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\alpha) = -0.965$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 165°$$

مُعطى : α هي زاوية حادَّة

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha = 75°}$$

ج)

$$\frac{BD}{\sin(\sphericalangle C)} = \frac{DC}{\sin(\sphericalangle DBC)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2R\sin\alpha}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin(\sphericalangle DBC)}$$

$$\boxed{\alpha = 75°}$$

$$\div R \Downarrow$$

$$\frac{2\sin 75}{\sin(105)} = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\sphericalangle DBC)}$$

$$\Downarrow$$

$$2 = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\sphericalangle DBC)}$$

$$\cdot\frac{\sin(\sphericalangle DBC)}{2} \quad \Downarrow$$

$$\sin(\sphericalangle DBC) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle DBC = 45°$$

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sphericalangle ABD = 45°}$$

د)

قانون سينوس العام في المثلث ABD

$$\frac{AD}{\sin(\sphericalangle ABD)} = 2R \longrightarrow \frac{AD}{\sin(45)} = 2R \longrightarrow AD = 2R \cdot \sin(45) = AD = R\sqrt{2}$$

مجموع زوايا المثلث ADB يساوي 180

$$\sphericalangle ADB = 180 - \sphericalangle ABD - \sphericalangle A = 180 - 45 - 75 = 60°$$

الزاوية المركزيّة تُساوي ضعف الزاوية المُحيطيَّة المُقابلة لنفس القوس

$$\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle A = 2 \cdot 75 = 150°$$

$$\boxed{\frac{S_{ABD}}{S_{BOD}} = \frac{BD \cdot h_1 \cdot \frac{1}{2}}{BD \cdot h_2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{h_1}{h_2}}$$

نجد S_{ABD} و S_{BOD} عن طريق قانون سينوس للمساحة :

$$S_{ABD} = BD \cdot AD \cdot \sin(\measuredangle ADB) \cdot \frac{1}{2} = 2R\sin(75) \cdot R\sqrt{2} \cdot \sin(60) \cdot \frac{1}{2} = R^2 \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BOD} = OB \cdot OD \cdot \sin(\measuredangle BOD) \cdot \frac{1}{2} = R \cdot R \cdot \sin(150) \cdot \frac{1}{2} = R^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{S_{ABD}}{S_{BOD}} = \frac{R^2 \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{4}}{R^2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} = 3+\sqrt{3} = \boxed{4.732}$$