أسئلة قصيرة – صيف 2022

أجيبوا عن 5 من الأسئلة (1-8). (لكل سؤال 20 درجة).

تنبيه: إذا أجبتم عن أكثر من 5 أسئلة، فستُفحص فقط الإجابات الخمس الأولى التي في دفتركم.

الفصل الأول: أسئلة قصيرة

1. أجيبوا عن 3 من البنود الأربعة "أ - د" التي أمامكم. إذا أجبتم عن أكثر من بندين، فستُفحص فقط الإجابتان الأوليان اللتان في دفتركم.

أ. (1) برهنوا بواسطة الاستقراء الرياضي او أي طريقة أخرى ان التعبير:

$$4^n - 1$$

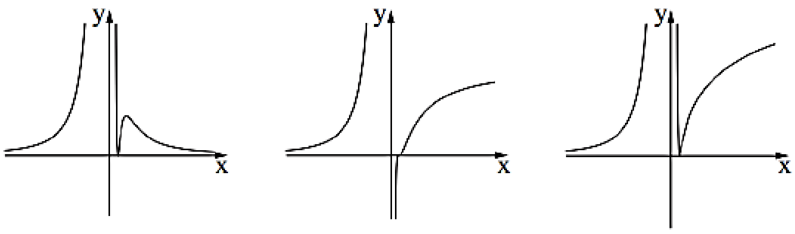
يقسم على 3 بدون باقي لكل n طبيعي.

(2) معطى: p هو عدد صحيح.

اكتبوا مثال لقيمة p من خلالها التعبير $4^{n+1} + p$ يقسم على 12 بدون باقي لكل n طبيعي.

ب. معطى الدالة: $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^3$

(1) واحد من الرسوم أ- ج يصف مشتقة الدالة $f'(x)$. حددوا أي من الرسوم الاتية يصف المشتقة. فسروا.

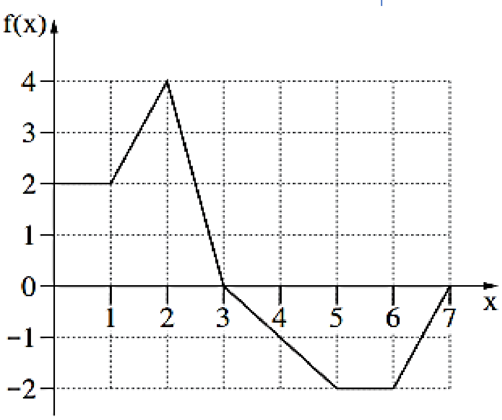


أ   ب   ج

(2) حددوا كم نقطة التواء يوجد للدالة $f(x)$. عللوا اجبتكم.

ج. في الرسم اماكم يظهر الرسم البياني للدالة $f\ (x)$ المعرفة في المجال $0 \le x \le 7$.

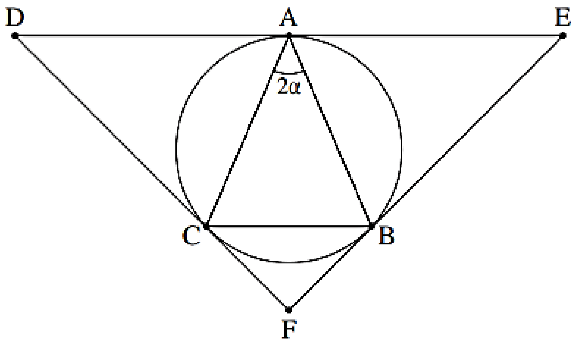
ومعطاه الدالة $h(t) = \int_0^t f(x)dx$ المعرفة في نفس المجال.



(1) جد قيم $h(0)$, $h(3)$, $h(5)$.

(2) جدوا مجال تنازل الدالة $h(t)$. عللوا اجبتكم.

د. المثلث ABC هو مثلث متساوي الساقين $(AB = AC)$ محصور في دائرة (انظروا الى الرسم).



نرمز الى زاوية الرأس للمثلث بـ 2α.

عبر كل رأس من رؤوس المثلث نمرر مماسا للدائرة.

المماسات تلتقي في النقاط D, E و F. كما موصوف في الرسمة.

عبروا بدلالة α عن زوايا المثلث DEF.

.2 المتوالية I هي متوالية هندسيّة لانهائيّة حدودها هي $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ وأساسها هو $9 \cdot r^2$.

معطى أنّ: $0 < r < \frac{1}{3}$.

بين كلّ حدّين في المتوالية I أَدخلوا حدًّا إضافيًّا، وتكوّنت متوالية هندسيّة جديدة تنازليّة، المتوالية II ، التي حدودها هي $b_1 , b_2 , b_3 , ...$ وأساسها هو q .

أ. **(1)** عبِّروا عن q بدلالة r .

(2) فسِّروا لماذا المتواليتان I وَ II متقاربتان (מתכנסות).

معطى أنّ مجموع المتوالية II هو $\frac{4}{3}$ ضعف مجموع المتوالية I .

ب. احسبوا q .

معطى أنّ مجموع الحدود التي في الأماكن الزوجيّة في المتوالية II هو 12 .

جـ. جدوا مجموع كلّ حدود المتوالية II التي في الأماكن التي تقسم على 5 $(b_5 , b_{10} , b_{15} , ...)$.

د. في المتوالية II ، جدوا النسبة بين الحدّ الخامس وبين مجموع كلّ الحدود التي تلي هذا الحدّ .

هـ. برهِنوا أنّه في كلّ متوالية هندسيّة متقاربة، النسبة بين حدٍّ ما وبين مجموع كلّ الحدود التي تليه لا تتعلّق بمكان الحدّ في المتوالية .

.3 تلعب ندى لعبة معيّنة . في هذه اللعبة توجد بالضبط ثلاث نتائج ممكنة : فوز وتعادل وخسارة .

الاحتمال بأن تفوز ندى في اللعبة هو 3 أضعاف الاحتمال بأن تخسر في اللعبة .

نرمز بِـ p إلى الاحتمال بأن تخسر ندى في اللعبة $(p > 0)$.

في كلّ السؤال، نتائج اللعبات لا تتعلّق ببعضها البعض .

معطى أنّه إذا لعبت ندى لعبتين؛ الواحدة تلو الأخرى، فإنّ الاحتمال بأن تفوز في لعبة واحدة على الأقلّ هو 4.5p .

أ. جدوا قيمة p .

لعبت ندى 5 لعبات؛ الواحدة تلو الأخرى .

ب. جدوا الاحتمال بأن تفوز ندى في 3 لعبات على الأقلّ .

جـ. جدوا الاحتمال بأن تفوز ندى في ثلاث اللعبات الأولى على الأقلّ .

د. **(1)** جدوا الاحتمال بأن لا تخسر ندى في أيّة لعبة .

(2) معلوم أنّ ندى خسرت في لعبة واحدة على الأقلّ . ما هو الاحتمال بأن تكون قد فازت في ثلاث اللعبات الأولى، وحصلت على نتيجة تعادل في اللعبة الأخيرة؟

/يتبع في صفحة 4/

الفصل الثاني: الهندسة وحساب المثلّثات في المستوى

4. معطاة دائرة نصف قطرها R ومركزها O .

من النقطة A التي خارج الدائرة تخرج ثلاثة مستقيمات:

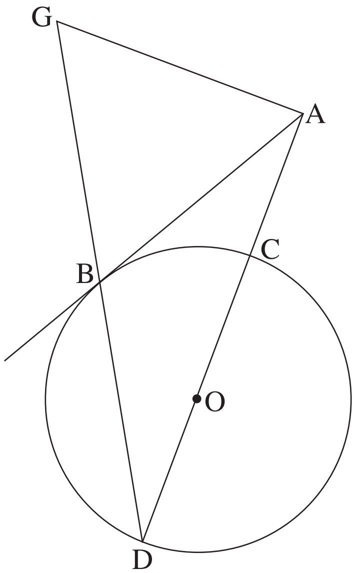
المستقيم AB يمسّ الدائرة في النقطة B ،

والمستقيم AD يمرّ عبر مركز الدائرة O ويقطع الدائرة في النقطتين C وَ D ،

والمستقيم AG يعامد المستقيم AD (انظروا الرسم).

النقاط D وَ B وَ G تقع على مستقيم واحد، كما هو موصوف في الرسم.

نرمز: $\sphericalangle ADB = \alpha$.



أ. عبِّروا عن جميع زوايا المثلّث ABG بدلالة α .

ب. برهِنوا أنّ: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.

معطى أنّ: $AC = \frac{1}{2}DC$ ، $AG = 8$.

جـ. احسبوا R.

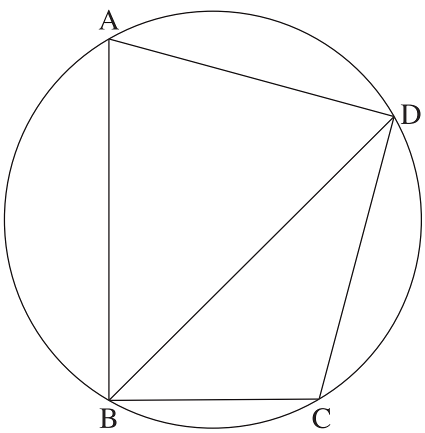
نرمز بـِ S إلى مساحة المثلّث BDC.

د. **(1)** برهِنوا أنّ: $\Delta ADG \sim \Delta BDC$.

(2) عبِّروا عن مساحة المثلّث ADG بدلالة S .

5. الشكل الرباعيّ ABCD محصور في دائرة نصف قطرها R ومركزها O (انظروا الرسم).

نرمز: $\sphericalangle DAB = \alpha$ ، α هي زاوية حادّة.



أ. عبِّروا عن طول قطر الشكل الرباعيّ BD بدلالة α وَ R .

معطى أنّ: $BC = R$ ، $CD = R\sqrt{2}$.

ب. احسبوا α .

معطى أنّ: BD هو منصِّف الزاوية ABC .

جـ. احسبوا مقدار الزاوية ABD .

نرمز بـِ h_1 إلى الارتفاع النازل من الرأس A في المثلّث ABD ،

وَبـِ h_2 إلى الارتفاع النازل من الرأس O في المثلّث BOD .

د. احسبوا $\frac{h_1}{h_2}$.

/يتبع في صفحة 5/

الفصل الثالث: حساب التفاضل والتكامل للبولينومات ولدوالّ الجذر وللدوالّ النسبيّة وللدوالّ المثلّثيّة

6. معطاة الدالّة $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

أ. **(1)** جدوا مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) هل الدالّة $f(x)$ هي زوجيّة أم فرديّة أم ليست زوجيّة وليست فرديّة؟ برهِنوا الإجابة.

(3) جدوا مجالات تصاعد ومجالات تنازل الدالّة $f(x)$.

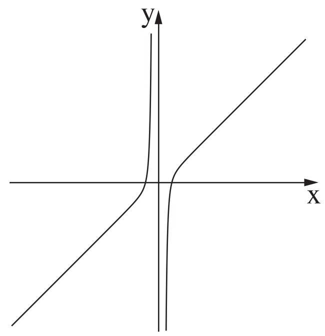
معطاة دالّتان: $f'(x)$ وَ $g(x)$.

$f'(x)$ هي دالّة مشتقّة الدالّة $f(x)$ ، وَ $g(x)$ تحقّق $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

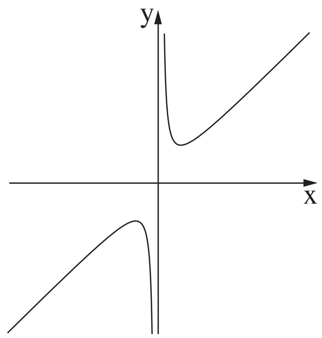
الدالّتان $f'(x)$ وَ $g(x)$ معرَّفتان في نفس المجال كالدالّة $f(x)$.

ب. كلّ واحد من الرسوم البيانيّة I–III التي أمامكم يصف إِحدى الدوالّ $f(x)$ وَ $f'(x)$ وَ $g(x)$.

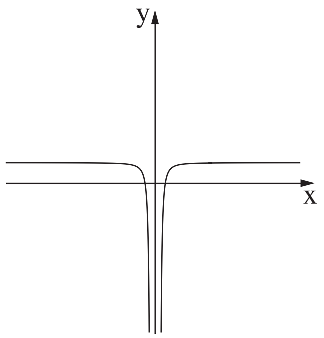
لكلّ واحدة من الدوالّ، اكتبوا أيّ رسم بيانيّ يصفها. علِّلوا الإجابة.



الرسم البيانيّ I



الرسم البيانيّ II



الرسم البيانيّ III

جـ. جدوا إِحداثيّات نقاط تقاطع الدالّة $g(x)$ مع المحور x.

د. احسبوا المساحة المحصورة بين الدالّة $g(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = \frac{1}{4}$ وَ $x = 4$.

هـ. معطى أنّ: $1 < a$ هو پارامتر. احسبوا $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\,dx$.

معطاة الدالّة $h(x) = \int_{1}^{x} f'(t)\,dt$. معطى أنّ الدالّة $h(x)$ معرَّفة في المجال $1 \le x$.

و. جدوا إِحداثيّات النقطة القصوى للدالّة $h(x)$ ، وحدِّدوا نوع هذه النقطة.

/يتبع في صفحة 6/

7. معطاة الدالّة $f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2\cos x}$ في المجال $0 \le x \le 2\pi$.

أ. **(1)** جدوا مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) فسِّروا لماذا لا توجد للدالّة $f(x)$ خطوط تقارب معامدة للمحور x .

(3) جدوا نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

ب. **(1)** بيِّنوا أنّه لكلّ x في مجال تعريف الدالّة $f(x)$ يتحقّق: $f'(x) = \cos x - \sin x$.

(2) جدوا إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدِّدوا نوع هذه النقاط.

جـ. **(1)** ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

(2) k هو عدد. جدوا جميع قيَم k التي بالنسبة لها يوجد للمعادلة $f(x) = k$ حلّ واحد (في المجال $0 \le x \le 2\pi$).

د. احسبوا المساحة المحصورة بين دالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = \frac{3}{4}\pi$ وَ $x = \frac{5}{4}\pi$.

8. معطاة الدالّتان: $f(x) = x^3$ ، $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ. **(1)** جدوا مجال تعريف الدالّة $f(x)$ ، ومجال تعريف الدالّة $g(x)$.

(2) جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$.

النقطة A تقع على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ ، والنقطة B تقع على الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ ، بحيث تكون القطعة AB موازية للمحور x.

معطى أنّ الإحداثيّ x للنقطة A يقع بين الإحداثيّات x لنقاط تقاطع الدالّة $f(x)$ مع الدالّة $g(x)$.

نرمز بـ t إلى الإحداثيّ x للنقطة A. t هو پارامتر.

ب. عبِّروا بدلالة t عن طول القطعة AB.

جـ. النقطة O هي نقطة أصل المحاور. جدوا أكبر مساحة ممكنة للمثلّث OAB.

د. هل تنتج أكبر مساحة ممكنة للمثلّث OAB عندما يكون طول القطعة AB أكبر ما يمكن؟ علِّلوا الإجابة.

בהצלחה!
نتمنّى لكم النّجاح!