قيم قصوى – شتاء 2010

٩. معطاة الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

أ. جد مجال تعريف الدالة.

ب. جد على الرسم البياني للدالة $f(x)$ نقطة، حاصل ضرب إحداثيّها الـ x بإحداثيها الـ y هو أصغر ما يمكن.

جـ. معطاة الدالة $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$.

استعِن بإجابتيك عن البند "أ" وعن البند "ب"، وارسم رسمًا تخطيطيًا للرسم البياني للدالة $g(x)$.

(أ) - نجد مجال تعريف الدالّة -

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\boxed{x - 1 > 0 \longrightarrow x > 1}$$

(ب) - نجد النقطة المطلوبة -

نجد نقطة في $f(x)$ حاصل ضرب إحداثيّ y و x أصغر ما يُمكن.

نرمز لنقطة: $\left(x_0 \, , \frac{1}{\sqrt{x_0-1}}\right)$

دالّة الهدف: حاصل ضرب إحداثيّ y و x أصغر ما يُمكن.

$$f(x) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0 - 1}}$$

نشتقّ الدالة لإيجاد أصغر قيمة ممكنة لحاصل ضرب الإحداثيّين:

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x_0-1} - \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}} \cdot x_0\right)}{\left(\sqrt{x_0-1}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x_0-1}-\frac{x_0}{2\sqrt{x_0-1}}\right)}{x_0-1}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{\left(\sqrt{x_0-1}-\frac{x_0}{2\sqrt{x_0-1}}\right)}{x_0-1}=0 \quad \xrightarrow{\cdot(x_0-1)} \quad \sqrt{x_0-1}-\frac{x_0}{2\sqrt{x_0-1}}=0 \xrightarrow{\cdot 2\sqrt{x_0-1}}$$

$$2(x_0-1)-x_0=0 \longrightarrow 2x_0-2-x_0=0$$

$$x_0=2$$

نصنّف النقطة للتأكّد أنها نقطة نهاية صُغرى.

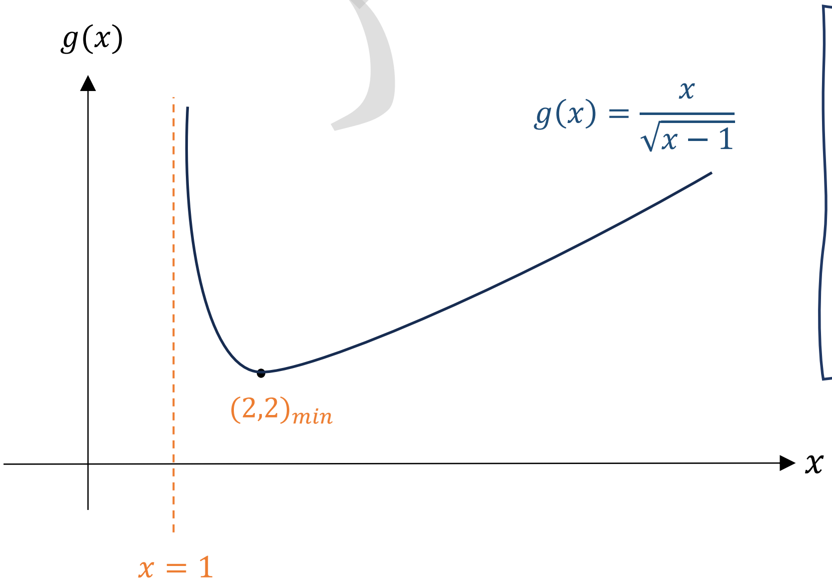
	1.5	2	5
$f'(x)$	$(-)$	0	$(+)$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\Downarrow$$

$$f(2)=\frac{1}{\sqrt{2-1}}=1$$

«في النقطة $(2,1)$ يكون حاصل ضرب احداثيّ النقطة أكبر ما يُمكن..

(ج) - نرسم رسما بيانيًا للدالّة $g(x)$ -



اذا بتلاحظ عزيزي الطالب الدالّة $g(x)$ هي دالّة الهدف في البند (ب) :

- ✓ وجدنا مشتقّة الدالة ونقطة النهاية الصغرى $x=2$
- ✓ $g(2)=\frac{2}{\sqrt{2-1}}=2 \longrightarrow (2,2)$
- ✓ مجال تعريف الدالّة نفس مجال تعريف الدالة $f(x)$ وهو: $x>1$