بحث دالة لوغاريثميّة - صيف 2015

سُؤال 4 :

معطاة الدالّة $f(x)=a\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$ المعرَّفة لكلّ x . a هو بارامتر أكبر من 0 .

أ. برهن أنّ الدالّة $f(x)$ هي دالّة فرديّة.

ب. (1) عبّر بدلالة a (إذا دعت الحاجة) عن إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط.

(2) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

جـ. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x=1$ وَ $x=-1$ ، إذا كان معطًى أنّ $a=2$.

د. معطاة الدالّة $g(x)$ التي تحقّق: $g(x)=[f(x)]^2$.

جد الإحداثيّات x للنقاط القصوى للدالّة $g(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط.

أ)

$$f(-x)=a\cdot(-x)\cdot e^{-\frac{(-x)^2}{8}}=-a\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}=-f(x)$$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ دالّة فرديّة

ب) (1)

$$f'(x)=a\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}+a\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\cdot\left(-\frac{1}{4}x\right)=a\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}-\frac{a}{4}\cdot x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$$

$$f'(x)=0 \;\longrightarrow\; a\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}-\frac{a}{4}\cdot x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}=0 \;\longrightarrow\; a\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\cdot\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=0$$

$$\longrightarrow\; 1-\frac{x^2}{4}=0 \;\longrightarrow\; 1=\frac{x^2}{4} \;\longrightarrow\; x^2=4 \;\longrightarrow\; \boxed{x=\pm 2}$$

x		-2		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$\left\{\begin{array}{c} f'(-4) = a \cdot e^{-\frac{(-4)^2}{8}} - \frac{a}{4} \cdot (-4)^2 \cdot e^{-\frac{(-4)^2}{8}} = -3ae^{-2} \quad \longrightarrow \quad (-) \\ f'(-4) = a \cdot e^{-\frac{0^2}{8}} - \frac{a}{4} \cdot 0^2 \cdot e^{-\frac{0^2}{8}} = a \quad \longrightarrow \quad (+) \\ f'(4) = a \cdot e^{-\frac{4^2}{8}} - \frac{a}{4} \cdot 4^2 \cdot e^{-\frac{4^2}{8}} = -3ae^{-2} \quad \longrightarrow \quad (-) \end{array}\right\}$$

$$f(-2) = a \cdot (-2) \cdot e^{-\frac{(-2)^2}{8}} = -\frac{2a}{\sqrt{e}} \quad \longrightarrow \quad \left(-2\,, -\frac{2a}{\sqrt{e}}\right) \text{ min}$$

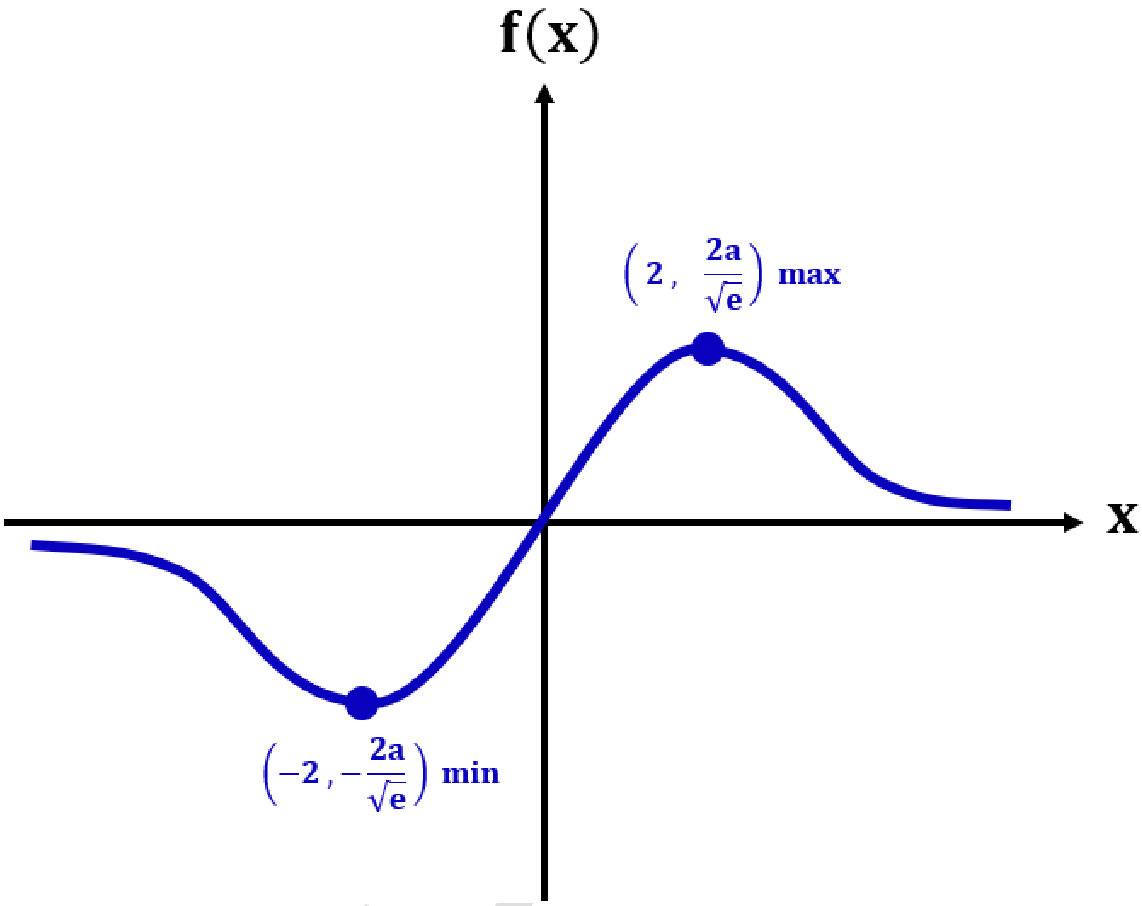
$$f(2) = a \cdot 2 \cdot e^{-\frac{2^2}{8}} = \frac{2a}{\sqrt{e}} \quad \longrightarrow \quad \left(2\,, \frac{2a}{\sqrt{e}}\right) \text{ max}$$

(2)

<u>نفحص وجود خُطوط تقارُب أفُقيَّة :</u>

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = 0^+}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = 0^-}$$



ج)

نرمُز المساحة المطلوبة : S .

$$S=\int_{-1}^{0}\big(0-f(x)\big)dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}-f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}-2\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx+\int_{0}^{1}2\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx=8\cdot\int_{-1}^{0}-\frac{1}{4}\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx-8\int_{0}^{1}-\frac{1}{4}\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx$$

$$=8\cdot\left[e^{-\frac{x^2}{8}}\right]_{-1}^{0}-8\cdot\left[e^{-\frac{x^2}{8}}\right]_{0}^{1}=8\cdot\left(e^{-\frac{0^2}{8}}-e^{-\frac{(-1)^2}{8}}\right)-8\cdot\left(e^{-\frac{1^2}{8}}-e^{-\frac{0^2}{8}}\right)$$

$$=0.94+0.94\ =\boxed{1.88}$$

د)

يُمكن إيجاد النُقاط القُصوى الخاصَّة بالدالَّة $g(x)$ من دون الحاجة الى بحثها , وذلك بمُساعدة الرسم التقريبي للدالَّة $f(x)$.

في $x=2$ يوجد نُقطة قُصوى max . (التربيع لن يُغيّر من صفتها كنُقطة قُصوى)

في $x=-2$ يوجد نُقطة قُصوى max . (التربيع لن يُغيّر من صفتها كنُقطة قُصوى ولكن سيُغيّر من نوعها)

في $x=0$ يوجد نُقطة قُصوى min . (سينتُج نُقطة قُصوى جديدة عندما تكون قيمة الدالة مُساوية لصفر وذلك لأنَّ الدالَّة الان موجبة دائما)