حساب مثلّثات صيف 2014

سُؤال 5 :

في المثلّث المتساوي الساقين ABC $(AB = AC)$،

BM هو مستقيم متوسّط للساق (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\sphericalangle BAC = 50^{o}$.

أ. احسب مقدار الزاوية المنفرجة AMB .

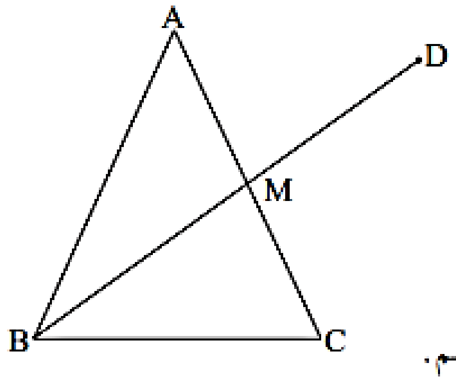
يمدّون BM حتّى النقطة D .

معطى أيضًا أنّ:

نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ABC هو 10 سم.

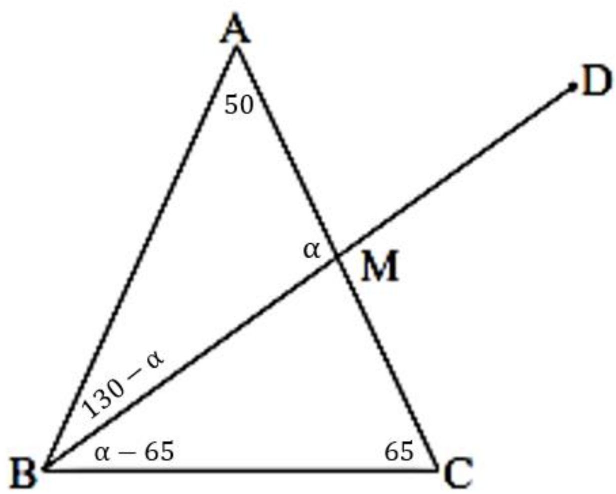
نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ABD هو 14 سم.

ب. احسب زوايا المثلّث AMD .



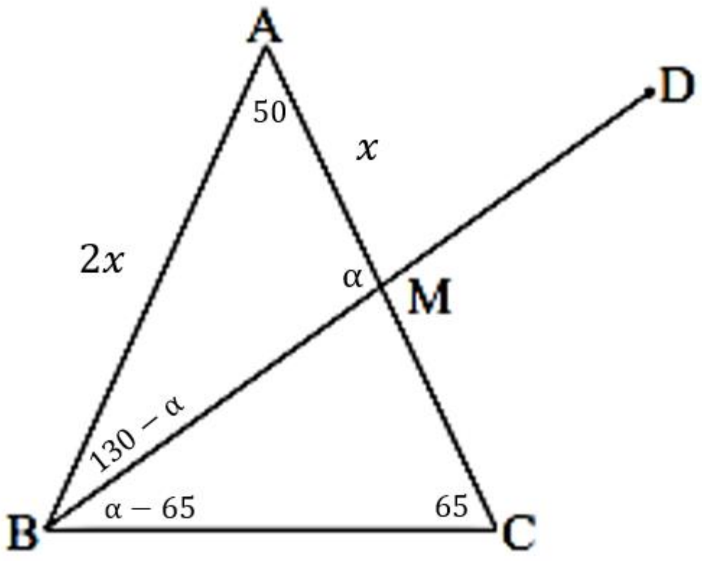
أ)

- $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \frac{180-50}{2} = 65° \Longleftarrow \sphericalangle A = 50°$ (زوايا القاعدة متساوية في مُثلّث مُتساوي الساقين)
- نرمز : $\sphericalangle C + \sphericalangle MBC = \alpha \Longleftarrow \sphericalangle AMB = \alpha$ (الزاوية الخارجيّة في المُثلّث تُساوي مجموع الزاويتين الداخلتين غير المُجاورة لها) $\sphericalangle MBC = \alpha - 65 \Longleftarrow 65 + \sphericalangle MBC = \alpha \Longleftarrow$
- $\sphericalangle ABM = 65 - (\alpha - 65) = 130 - \alpha \Longleftarrow \sphericalangle ABM = \sphericalangle B - \sphericalangle MBC$



○ مُعطى أنَّ النُقطة M تتوَسَّط الساق AC .

○ نرمُز : $AM = x$ $\Leftarrow$ $AB = AC = 2 \cdot AM = 2x$.



<u>نَنظُر الى المُثَلَّث ΔABM :</u>

$$\frac{AB}{\sin(\sphericalangle AMB)} = \frac{AM}{\sin(\sphericalangle ABM)}$$ (قانون سينوس العام)

$$\downarrow$$

$$\frac{2x}{\sin(\alpha)} = \frac{x}{\sin(130 - \alpha)}$$

$$\div x \downarrow$$

$$\frac{2}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\sin(130 - \alpha)}$$

$$\downarrow$$

$$2\sin(130 - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\downarrow$$

$$2 \cdot (\sin 130 \cdot \cos\alpha - \cos 130 \cdot \sin\alpha) = \sin(\alpha)$$

<u>نتذكَّر القانون :</u>

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\downarrow$$

$$1.532\cos(\alpha) + 1.285 \cdot \sin(\alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\downarrow$$

$$1.532\cos(\alpha) = -0.285 \cdot \sin(\alpha)$$

$$\div\,(\mathbf{-0.285\cos(\alpha)}) \downarrow$$

$$\frac{1.532}{-0.285} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\downarrow$$

$$\tan(\alpha) = -5.375$$

$$\downarrow$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-5.375)$$

$$\downarrow$$

$$\alpha = -79.461 + 180k \quad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z})$$

$$\boldsymbol{k = 1} \downarrow$$

$$\boxed{\alpha = 100.539°}$$

ب)

ننظُر الى المُثلَّث ΔABC :

$$\text{(قانون سينوس العام)} \quad \frac{AB}{\sin(\sphericalangle C)} = 2R_{ABC}$$

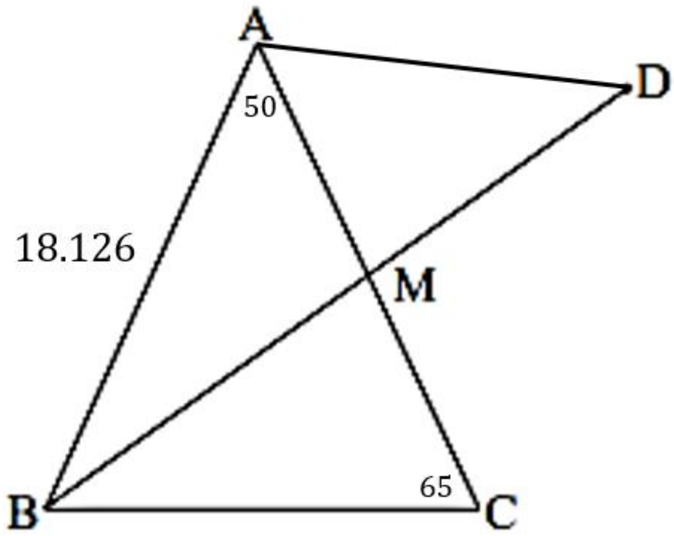
$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{\sin(65)} = 2 \cdot 10$$

$$\cdot\,\mathbf{\sin(65)} \Downarrow$$

$$\boxed{AB = 18.126}$$

$$\downarrow$$



<u>ننظُر الى المثلَّث ΔABD :</u>

$$\frac{AB}{\sin(\sphericalangle D)} = 2 \cdot R_{ABD}$$ (قانون سينوس العام)

$$\Downarrow$$

$$\frac{18.126}{\sin(\sphericalangle D)} = 2 \cdot 14$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(\sphericalangle D) = \frac{18.126}{28} = 0.6473$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle D = \sin^{-1}(0.6473)$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle D = 40.343 + 360k$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

$$\sphericalangle D = 139.656 + 360k$$

$$\boxed{\sphericalangle D = 40.343^\circ}$$

$\Longleftarrow \measuredangle D < 130 \quad \Longleftarrow \quad \measuredangle ABD + \measuredangle D < 130 \quad \Longleftarrow \quad \measuredangle BAM = 50$ الزاوية

$$\Downarrow$$

- $\boxed{\measuredangle AMD = 79.461^\circ} \longleftarrow 100.539 + \measuredangle AMD = 180 \longleftarrow \measuredangle AMB + \measuredangle AMD = 180$
- $40.343 + 79.461 + \measuredangle MAD = 180 \longleftarrow \measuredangle D + \measuredangle AMD + \measuredangle MAD = 180$

ينتُج أنَّ : $\boxed{\measuredangle MAD = 60.196^\circ}$