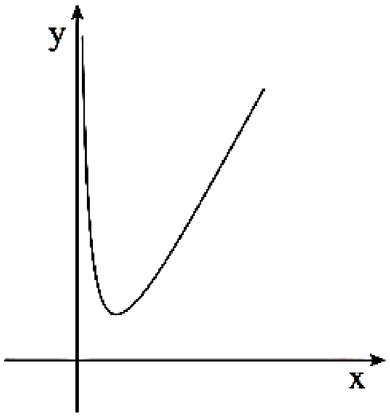
دوال أسية ولوغاريثمية صيف 2011 – موعد (ب)

سؤال 5:



معطاة الدالة $f(x) = (\ell nx)^2 + x$ ، $x > 0$

(انظر الرسم)، ومعطى المستقيم $y = x - 4$.

أ. انسخ الرسم البياني للدالة $f(x)$ إلى دفترك،

وأَضِف إليه رسمًا للمستقيم المعطى. علّل.

النقطة A موجودة على الرسم البياني للدالة $f(x)$ ،

والنقطة B موجودة على المستقيم المعطى.

ب. جد أدنى طول للقطعة AB ، إذا كانت القطعة موازية للمحور y .

جـ. جد أدنى طول للقطعة AB ، إذا كانت القطعة معامدة للمستقيم المعطى.

د. من بين جميع القِطَع AB الممكنة، ما هو أدنى طول للقطعة AB ؟ علّل.

أ)

- نجد ما اذا كانت للدالّة $f(x)$ والخط المُستقيم نُقاط تقاطُع :

$$f(x) = \text{الخط المُستقيم}$$

$$\Downarrow$$

$$(\ln x)^2 + x = x - 4$$

$$\Downarrow$$

$$(\ln x)^2 = -4$$

$$\Downarrow$$

$$\emptyset$$

لا يوجد نُقاط تقاطُع بين الرَسمَين

○ <u>نجد نُقاط تقاطُع الخط المُستقيم مع المحورين :</u>

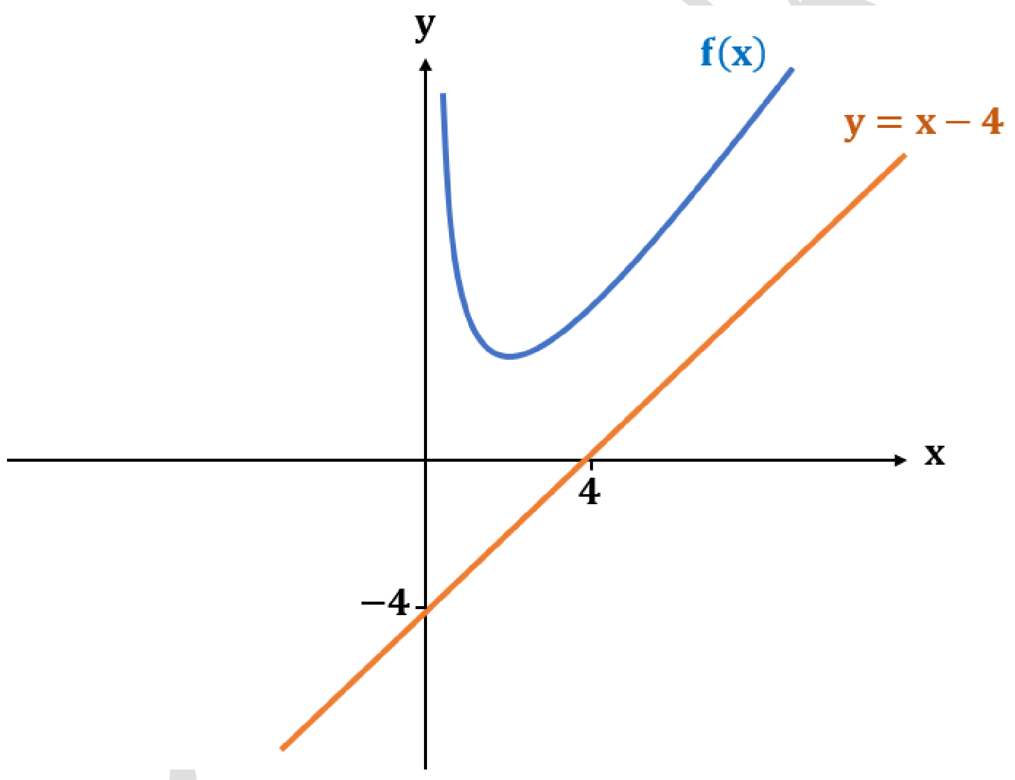
❖ مع المحور y :

$$y = 0 - 4 = -4 \quad \longrightarrow \quad (0, -4)$$

❖ مع المحور x :

$$x - 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 4 \quad \longrightarrow \quad (4, 0)$$

○ <u>الان , نرسُم المُستقيم :</u>



ب)

القطعة AB مُوازية للمحور y , أي أنَّ احداثي x للنُقطتين A و B مُتشابه

$$\Downarrow$$

$$AB = \underbrace{d(x)}_{\text{رمز مِنْ عنّا}} = f(x) - (x-4) = (\ln x)^2 + x - x + 4 = (\ln x)^2 + 4$$

نجد النُقطة القُصوى الدُنيا (min) لِ d(x) :

$$\left\{ \begin{array}{c} d(x) = (\ln x)^2 + 4 \\ \downarrow \\ d'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \end{array} \right\}$$

$$d'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot \ln(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 1$$

x		0		1	
d'(x)			$-$	0	$+$
d(x)			↘	min	↗

$$\left\{ \begin{array}{c} d'(0.5) = 2 \cdot \ln(0.5) \cdot \frac{1}{0.5} = -2.772 \quad \longrightarrow \quad (-) \\ d'(2) = 2 \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{2} = 0.693 \quad \longrightarrow \quad (+) \end{array} \right\}$$

$$\boxed{AB_{min} = d(1) = (\ln 1)^2 + 4 = 4}$$

ج)

نُقطة تقع على الدالّة - $(t\,,\ f(t)) \longrightarrow (t\,,\ \ln^2(t)+t)$

مُعادلة الخط المُستقيم - $y=x-4 \longrightarrow -x+y+4=0 \longrightarrow \underbrace{(-1)}_{A=-1}\cdot x+\underbrace{(1)}_{B=1}\cdot y+\underbrace{4}_{C=4}=0$

قانون البعد بين نُقطة وخط مُستقيم : $d=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

$$\Downarrow$$

$$d=\left|\frac{(-1)\cdot t+(1)\cdot(\ln^2(t)+t)+4}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}\right|=\left|\frac{-t+\ln^2(t)+t+4}{\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{\ln^2(t)+4}{\sqrt{2}}\right|=\frac{\ln^2(t)+4}{\sqrt{2}}$$

$$AB=\underbrace{h(t)}_{\text{رمز مِنْ عنّا}}=\frac{\ln^2(t)+4}{\sqrt{2}}$$

نجد النُقطة القُصوى الدُنيا (min) لِ $h(t)$:

$$\left\{\begin{array}{c} h(t)=\dfrac{\ln^2(t)+4}{\sqrt{2}}=\dfrac{\ln^2(t)}{\sqrt{2}}+\left(\sqrt{2}\right)^3 \\ \downarrow \\ h'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\ln(t)\cdot\dfrac{1}{t}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\ln(t)}{t} \end{array}\right\}$$

$$h'(t)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\ln(t)}{t}=0$$

$$\cdot t \quad \Downarrow$$

$$\sqrt{2}\cdot\ln(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$t = 1$$

t		0		1	
h'(t)			$-$	0	$+$
h(t)			$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\left\{\begin{array}{l} h'(0.5) = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\ln(0.5)}{0.5} = -1.96 \quad \longrightarrow \quad (-) \\ h'(2) = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\ln(2)}{2} = 0.49 \quad \longrightarrow \quad (+) \end{array}\right\}$$

$$\boxed{AB_{min} = h(1) = \frac{\ln^2(1) + 4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}}$$

د)

أقصر بُعد بين نُقطة ما على الدالَّة $f(x)$ والمُستقيم المَعطي هُو طول الارتفاع النازل من النُقطة على المستقيم , ولهذا فانَّ أقصر طول ممكن لِ AB هُو أقصر طول ارتفاع نازل على المُستقيم . ينتُج أنَّ أقصر طول ممكن لِ AB هُو $2\sqrt{2}$ (وجدناه في الفرع السابق) .