دوال مُثَلَّثِيَّة – صيف 2017

## سؤال 7 :

معطاة الدالّة $f(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ .

أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$ .

(2) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

(3) جد خطوط التقارب العموديّة للدالّة $f(x)$ .

(4) جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

ب. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$ في المجال $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ .

جـ. معطى أنّ: $0<a<\frac{\pi}{2}$ .

المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمستقيم $x=a$ والمحور x تساوي 1 .

جد a .

**أ)**

**(1)**

$$f(x)=\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\ \cos^3(x)\neq 0\ \right\}$$ ( المقام لا يُساوي صفر )

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k}$$ $(k\in\mathbb{Z})$

**(2)**

تقاطُع الدَّالّة مع المحور $y$ :

$$f(0)=\frac{2\sin(0)}{\cos^3(0)}=\frac{2\cdot 0}{1^3}=0 \quad\longrightarrow\quad (\,0\,,0\,)$$

تقاطُع الدَّالّة مع المحور $x$ :

$$f(x)=0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}=0$$
$$\cdot\cos^3(x)\ \Downarrow$$
$$2\sin(x)=0$$
$$\div 2\ \Downarrow$$
$$\sin(x)=0$$
$$\Downarrow$$
$$(\,k\in\mathbb{Z}\,)\qquad x=\pi k$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{(\,\pi k\,,\ \ 0\,)}$$

**(3)**

خُطوط التقارُب المعامدة للمحور $x$ :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+\pi k} f(x)\ \longrightarrow\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+\pi k}\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)}{0}=\infty$$

$$\longrightarrow\ \boxed{x=\frac{\pi}{2}+\pi k}$$

لا يوجد خطوط تقارُب مُعامدة للمحور $y$ .

**(4)**

لنجد مجالات التصاعُد والتنازُل للدَّالّة $f(x)$ , نجد أوَّلاً $f'(x)$ :

$$f(x)=\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$$

$$\downarrow$$

$$f'(x)=\frac{2\cos(x)\cdot\cos^3(x)-2\sin(x)\cdot3\cos^2(x)\cdot(-\sin(x))}{(\cos^3(x))^2}$$

$$=\frac{2\cos^4(x)+6\sin^2(x)\cos^2(x)}{\cos^6(x)}$$

نُساوي $f'(x)$ لصفر :

$$f'(x)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2\cos^4(x)+6\sin^2(x)\cos^2(x)}{\cos^6(x)}=0\ \longrightarrow\ \frac{2\cos^2(x)\cdot(\cos^2(x)+3\sin^2(x))}{\cos^2(x)\cdot\cos^4(x)}=0$$

$$\longrightarrow\ \frac{2\cdot(\cos^2(x)+3\sin^2(x))}{\cos^4(x)}=0\ \longrightarrow\ \cos^2(x)+3\sin^2(x)=0\ \longrightarrow\ \cos^2(x)=-3\sin^2(x)$$

$$\longrightarrow\ \cos(x)=\sqrt{-3}\cdot\sin(x)\ \longrightarrow\ \emptyset$$

$$\Downarrow$$

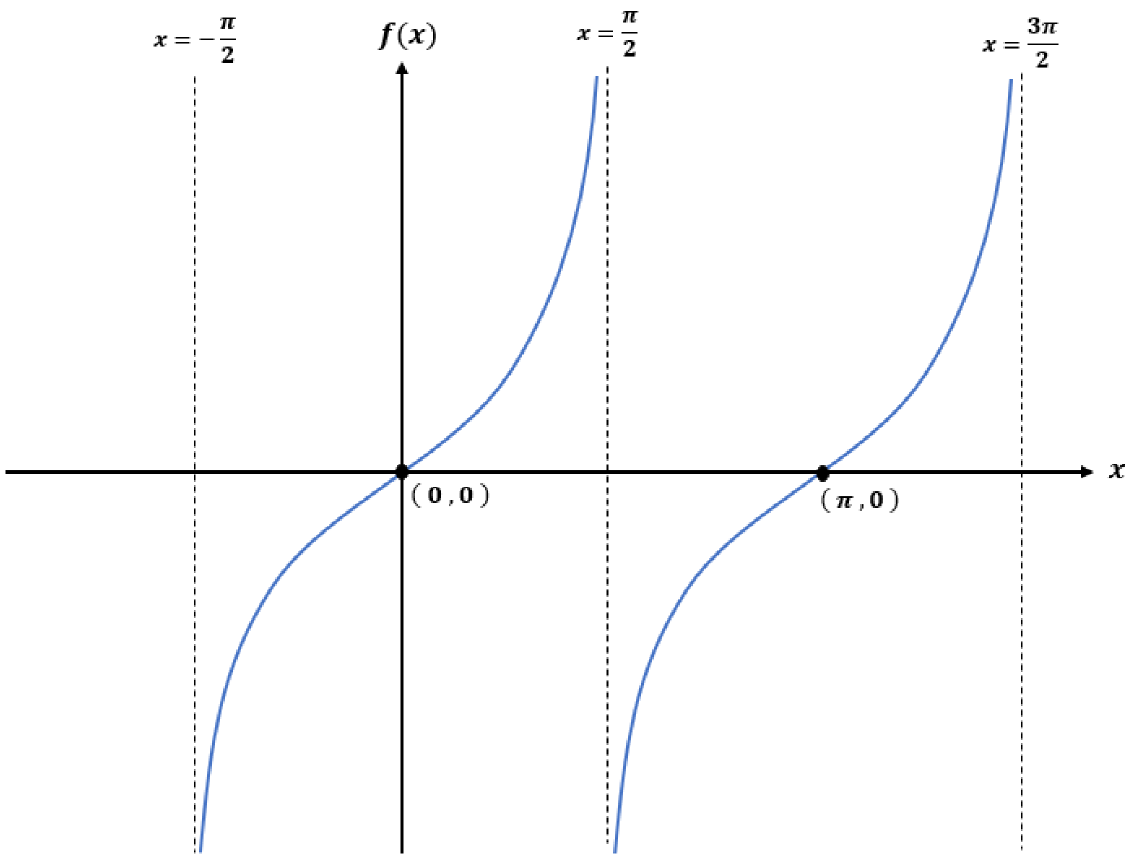
لا يوجد نُقاط قُصوى في الدَّالّة

| $x$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

$$\left\{\begin{aligned}
f'(-\pi) &= \frac{2\cos^4(-\pi) + 6\sin^2(-\pi)\cos^2(-\pi)}{\cos^6(-\pi)} \longrightarrow (+) \\
f'(0) &= \frac{2\cos^4(0) + 6\sin^2(0)\cos^2(0)}{\cos^6(0)} \longrightarrow (+) \\
f'(\pi) &= \frac{2\cos^4(\pi) + 6\sin^2(\pi)\cos^2(\pi)}{\cos^6(\pi)} \longrightarrow (+)
\end{aligned}\right\}$$

ينتُج أنَّ الدَّالَّة $f(x)$ تصاعُديَّة دائما في مجال تعريفها .

**ب)**



ج)

$$\int_0^a f(x) = \int_0^a \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}dx = 2\int_0^a \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = 2\int_0^a \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \tan(x)\,dx$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{\tan^2(x)}{2}\right]_0^a = 2 \cdot \left(\frac{\tan^2(a)}{2} - \frac{\tan^2(0)}{2}\right) = \tan^2(a)$$

مُعطى أنَّ المساحة المحصورة تُساوي 1

$\Downarrow$

$$\tan^2(a) = 1$$

( جذر للطرفين ) $\Downarrow$

$$\tan(a) = \pm 1$$

$\Downarrow$

$$a = \pm\frac{1}{4}\pi$$

( $a$ موجب ) $\Downarrow$

$$\boxed{a = \frac{1}{4}\pi}$$