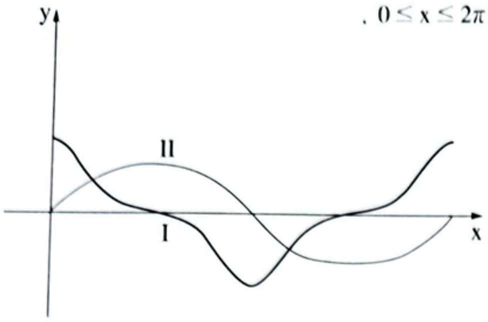
دالة مثلّثيّة – صيف 2025



7. في الرسم الذي أمامكم معطى الرسمان البيانيّان، I–II ، في المجال $0 \le x \le 2\pi$.
أحد الرسمَيْن البيانيَّيْن يصف الدالّة $f(x)$ ،
والآخر يصف دالّة مشتقّتها $f'(x)$.
الدالّتان $f(x)$ و $f'(x)$ معرَّفتان لكلّ x في المجال المعطى.

أ. حدِّدوا أيًّا من الرسمَيْن البيانيَّيْن I–II يصف الدالّة $f(x)$.
علِّلوا تحديدكم.

معطى أنّ $f(x)=\frac{\sin x}{1+(\sin x)^2}$ معرَّفة في المجال $0 \le x \le 2\pi$.

ب. (1) جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور x .
(2) جدوا إحداثيّات جميع النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدِّدوا نوع هذه النقاط.

معطاة الدالّة $g(x)=|f(x)-0.4|$ ، المعرَّفة في المجال $0 \le x \le 2\pi$.

جـ. جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع المحور x .

د. (1) ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $g(x)$.
(2) جدوا إحداثيّات جميع النقاط القصوى للدالّة $g(x)$ ، وحدِّدوا نوع هذه النقاط.

أ. نحدد أي رسم يصف الدالة $f(x)$

بحسب العلاقة بين المشتقة والدالة، نرى أنّه في مجالات تصاعد الدالة II تكون الدالة I موجبة، وفي مجالات تنازلها تكون الدالة I سالبة.

الرسم II يصف الدالة $f(x)$

العلاقة بين المشتقة والدالة:

$f(x)$	$f'(x)$
↗	$+$ (فوق محور x)
↘	$-$ (تحت محور x)
max min	نقاط صفرية (على محور x)

ب. (1) نجد إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع محور x

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+(\sin x)^2}$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k$$

$k=0 \quad x=0 \quad (0,0)$

$k=1 \quad x=\pi \quad (\pi,0)$

$k=2 \quad x=2\pi \quad (2\pi,0)$

ب. (2) نجد إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة، ونحدّد نوعها

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+(\sin x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot(1+(\sin x)^2)-(2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin x)}{(1+(\sin x)^2)^2}$$

$$\frac{\cos x\cdot(1+(\sin x)^2)-(2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin x)}{(1+(\sin x)^2)^2}=0$$

$$\cos x\cdot(1+(\sin x)^2)-(2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin x)=0$$

$$\cos x+\cos x\cdot(\sin x)^2-2(\sin x)^2\cdot\cos x=0$$

$$\cos x-\cos x\cdot(\sin x)^2=0$$

$$\boxed{1-(\sin x)^2=(\cos x)^2}$$

$$\cos x\,(1-(\sin x)^2)=0$$

$$(\cos x)^3=0$$

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$k=0\quad x=\frac{\pi}{2}$$

$$k=1\quad x=\frac{3\pi}{2}$$

0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
min ↗	max ↘	min ↗	max

$$\min(0,0)\,,\max\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right),\max\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{1}{2}\right),\max(2\pi,0)$$

ج. نجد إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $g(x)$ مع محور x

$$g(x) = 0$$

$$g(x) = |f(x) - 0.4|$$

$$f(x) - 0.4 = 0$$

$$\frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\sin x = t$$

$$\frac{t}{1 + t^2} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\frac{t}{1 + t^2} = \frac{2}{5}$$

$$5t = 2 + 2t^2$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \qquad t = 2$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \sin x = 2$$

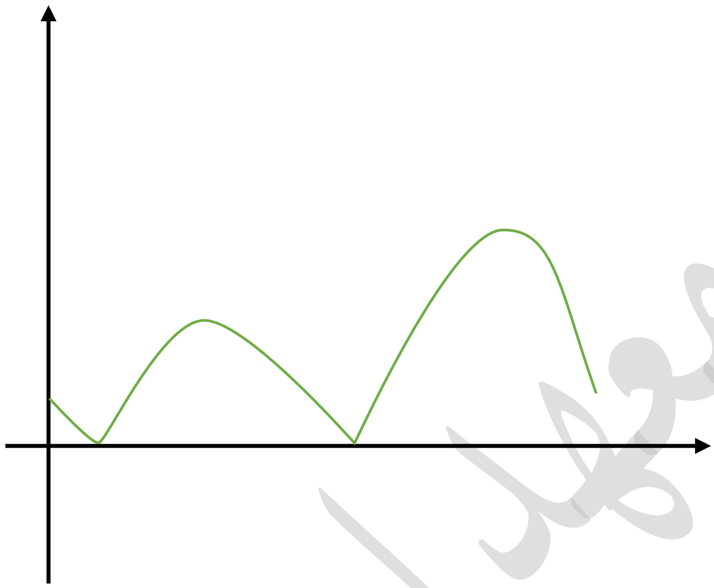
$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k = 0 \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k = 0 \quad x = \frac{5\pi}{6} \quad \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$$

د. (1) نرسم رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالة $g(x)$



د. (2) نجد إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة $g(x)$، ونحدّد نوعها

$\max(0,0.4)\,,\min\left(\frac{\pi}{6},0\right)\max\left(\frac{\pi}{2},0.1\right),$

$\min\left(\frac{5\pi}{6},0\right),max\left(\frac{3\pi}{2},0.9\right),\min(2\pi,0.4)$