متواليات – صيف أ 2023

- حلّ نسخة ب -

(2) معطاة متواليتان هندسيّتان لانهائيّتان متقاربتان، A وَ B ، جميع حدودهما لا تساوي 0.

الحدّ العامّ للمتوالية A هو a_n وأساسها هو q_A .

الحدّ العامّ للمتوالية B هو b_n وأساسها هو q_B .

يبنون من المتواليتين الهندسيّتين A وَ B متوالية هندسيّة لانهائيّة متقاربة جديدة، حدودها هي:

$\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$, ... , $\frac{a_n}{b_n}$, ...

جميع المتواليات الثلاث، المتوالية A والمتوالية B والمتوالية الجديدة، هي ليست ثابتة.

أ. عبِّروا عن أساس المتوالية الجديدة بدلالة q_A وَ q_B .

المتوالية A ليست تصاعديّة وليست تنازليّة، والمتوالية B تصاعديّة.

ب. بالنسبة لكلّ واحد من القولين (1)–(2) اللذين أمامكم، حدِّدوا إذا كان صحيحًا أم غير صحيح، وعلِّلوا تحديدكم.

(1) أساس المتوالية الجديدة هو موجب.

(2) جميع حدود المتوالية B هي سالبة.

الأعداد c_1 وَ c_2 وَ c_3 هي ثلاثة حدود أولى في متوالية حسابيّة.

معطى أنّ c_2 يساوي $-c_1$ ، ويتحقّق أيضًا: $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{72}$.

جـ. جدوا c_1 .

معطى أنّ أساس المتوالية A يساوي c_1 ،

ويتحقّق أيضًا: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}$

د. جدوا قيمة q_B .

(أ) نجد أساس المتوالية الجديدة

مُعطى انَّ المتواليتان هندسيتان

$$q_{\text{جديدة}} = \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{b_n}{a_n}$$

$$\Downarrow$$

$$q_{\text{جديدة}} = \frac{a_1 (q_A)^{n+1}}{b_1 (q_B)^{n+1}} \cdot \frac{b_1 (q_B)^n}{a_1 (q_A)^n} = q_A \cdot \frac{1}{q_B} = \boxed{\frac{q_A}{q_B}}$$

(ب) نجد صحيّة الجمل المعطاة

(1) هل أساس المتوالية الجديدة موجب؟

- المتوالية B هي متوالية تصاعدية ← $0 < q < 1$ (أي أنّ الأساس موجب)
- المتوالية A هي متوالية ليست تنازلية وليست تصاعدية ← $-1 < q < 0$ (أي أنّ الأساس سالب)

$$\Downarrow$$

$$q_{\text{جديدة}} = \frac{q_A}{q_B} \rightarrow \frac{-}{+} = -$$

أي أنَّ أساس المتوالية سالب

↓

الفرضيّة خاطِئة

(2) هل جميع حدود المتوالية B سالبة؟

المتوالية الهندسية التصاعدية تكون متقاربة إذا كانت حدودها سالبة

إذًا الفرضيّة صحيحَة

(ج) نجد الحدّ c_1

معطى $\leftarrow c_2 = -c_1$

معطى انَّ المتوالية حسابية

$$c_2 = c_1 + d$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 + d = -c_1$$

$$\Downarrow$$

$$d = -2c_1$$

نعوّض

معطى $\leftarrow \frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{72}$

$$\frac{c_1 \cdot -c_1}{c_1 + 2d} = -\frac{1}{72}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c_1 \cdot -c_1}{c_1 - 2(2c_1)} = -\frac{1}{72}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-c_1 \cdot c_1}{-3c_1} = -\frac{1}{72}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c_1}{3} = -\frac{1}{72}$$

$\cdot 3$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = -\frac{1}{24}$$

(د) نجد q_B

مجموع حدود المتوالية التقاربية التي حسبنا أساسها في البند الاول

مجموع حدود المتوالية الهندسية التقاربية A

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots}$$

الحد الأول في المتوالية

مجموع حدود المتوالية الهندسية التقاربية B

$$\Downarrow$$

نستعمل قانون المجموع المتوالية المتقاربة

$$\frac{a_1}{1-q}$$

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}}{1-\frac{q_A}{q_B}}=\frac{\frac{a_1}{1-q_A}}{\frac{b_1}{1-q_B}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{q_A}{q_B}}=\frac{a_1}{1-q_A}\cdot\frac{1-q_B}{b_1}$$

$$\Downarrow$$

مُعطى $c_1=q_A=-\frac{1}{24}$

$$\frac{1}{1-\frac{-\frac{1}{24}}{q_B}}=\frac{1-q_B}{1-\left(-\frac{1}{24}\right)}$$

ضرب متبادل

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{24\cdot q_B}}=\frac{1-q_B}{\frac{25}{24}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{25}{24}=\left(1+\frac{1}{24\cdot q_B}\right)\cdot(1-q_B)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{25}{24} = 1 - q_B + \frac{1}{24\,q_B} - \frac{1}{24 \cdot q_B} \cdot q_B$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{25}{24} = \frac{23}{24} - q_B + \frac{1}{24\,q_B}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{24} = -q_B + \frac{1}{24 \cdot q_B}$$

$$\Downarrow \qquad \cdot 24\,q_B$$

$$2q_B = -24{q_B}^2 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$0 = 24{q_B}^2 + 2q_B - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 24 \cdot (-1)}}{2 \cdot 24}$$

تذكّر معي عزيزي الطالب من البند ب قلنا انه الأساس **موجب**

$$q_B = \frac{1}{6} \;, q_B \neq -\frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$q_B = \frac{1}{6}$$