دوال أسيّة ولوغاريثمية صيف 2020 موعد أ

معطاة الدالّة: $f(x)=\ell n((e^x-b)^2+1)$. b هو بارامتر.

أجب عن البند "أ" . إذا دعت الحاجة، عبّر عن إجاباتك بدلالة b .

أ. (1) ما هو مجال تعريف الدالّة f(x)؟

(2) علّل لماذا $f(x)\geq 0$ في كلّ مجال تعريف الدالّة f(x) .

(3) جد معادلة خطّ التقارب الأفقيّ للدالّة f(x).

(4) حدّد بالنسبة لأيّة قِيَم لـ b ، توجد للدالّة f(x) نقطة قصوى،
وإذا كان للدالّة نقطة قصوى كهذه، جد إحداثيّاتها، وبيّن أنّها نقطة نهاية صغرى.

(5) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة f(x) بالنسبة لـ $b=2$.

ب. جد جميع قِيَم b التي بالنسبة لها يكون المستقيم $y=\ell n5$ خطّ تقارب للدالّة f(x) . علّل.

جـ. معطى أنّه بالنسبة لإحدى قِيَم b التي وجدتَها في البند "ب"، لا توجد للدالّة f(x) نقاط قصوى.
بالنسبة لهذه القيمة لـ b ، حدّد إذا كانت الدالّة f(x) تصاعديّة أم تنازليّة. علّل.

1 أ (1) يجب أن يكون التعبير داخل الـ ln أكبر من الصفر.

$$(e^x-b)^2+1>0$$

تعبير موجب أو صفر

$1>0$ دائمًا

لذلك فإن مجال التعريف هو كل x .

(2) لأن التعبير داخل الـ ln (مجال تعريف الدالة)

$$(e^x-b)^2+1\geq 1$$

وحسب $\ln(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ نستنتج ان :

$$f(x)=\ln((e^x-b)^2+1)\geq 0$$

(3)

$$\lim_{x\to\infty}\ln((e^x-b)^2+1)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ln((e^x-b)^2+1)=\ln(b^2+1)$$

لذلك $y=\ln(b^2+1)$ هي خط تقارب أفقي.

(4)

$$f'(x)=\frac{2(e^x-b)\cdot e^x}{(e^x-b)^2+1}$$

$$e^x-b=0$$

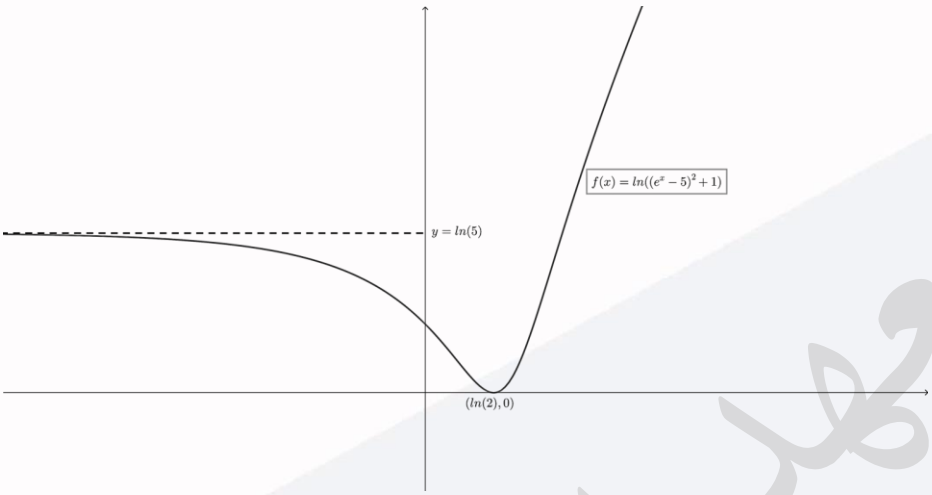
$$e^x=b$$

إذا كان $b \leq 0$ فلا يوجد نقاط قصوى. وإذا كان $b > 0$ فإن $x = \ln(b)$ هي نقطة قصوى.
ولأن:

$$f'\left(\frac{b}{2}\right) < 0, \qquad f'(2b) > 0, \qquad f(\ln(b)) = \ln(1) = 0$$

فإن $(\ln(b), 0)$ هي نهاية صغرى.

(5)



ب

$$\lim_{x \to -\infty} \ln((e^x - b)^2 + 1) = \ln((-b)^2 + 1)$$

$$\ln(5) = \ln((-b)^2 + 1)$$

$$5 = b^2 + 1$$

$$b = \pm 2$$

ج

بالنسبة لقيمة $b = -2$ لا توجد للدالة نقاط قصوى (من البند أ "4").

$$f'(x) = \frac{2(e^x + 2) \cdot e^x}{(e^x + 2)^2 + 1}$$

الدالة تصاعدية لأنه من الواضح ان المشتقة موجبة دائما.

معهد إيهاب عمر