حساب مُثلَّثات – صيف 2021

سؤال 5 :

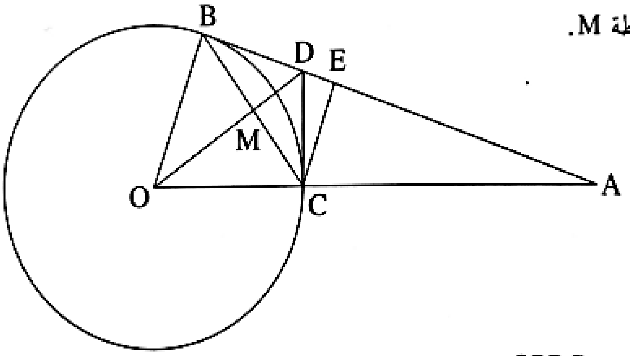
DB وَ DC يمسّان دائرة مركزها O ، كما هو موصوف في الرسم. نصف قطر الدائرة: R.

امتداد BD يقطع امتداد OC في النقطة A.

القطعة OD ووتر الدائرة BC يتقاطعان في النقطة M.

القطعة CE تعامد AB.

نرمز: $\sphericalangle ABC = \alpha$.



أ. فسّر لماذا يمكن حصر في دائرة:

(1) الشكل الرباعيّ $OBDC$.

(2) الشكل الرباعيّ $MDEC$.

نرمز: d_1 هو قطر الدائرة التي تحصر الشكل الرباعيّ $OBDC$.

d_2 هو قطر الدائرة التي تحصر الشكل الرباعيّ $MDEC$.

d_3 هو قطر الدائرة التي تحصر المثلّث AOD.

ب. عبّر بدلالة α وَ R عن d_1 وعن d_2 وعن d_3 .

جـ. جد قيمة α التي يتحقّق بالنسبة لها: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.

أ)

(1)

- $\sphericalangle OBD = 90°$ (القُطر يُعامد المماس)
- $\sphericalangle OCD = 90°$ (القُطر يُعامد المماس)
- ينتُج أنَّ : الشكل الرُباعي $OBDC$ قابل للحصر في دائرة (شكل رُباعي فيه زاويتين متقابلتين مجموعهما 180 يُمكن حصرُه في دائرة)

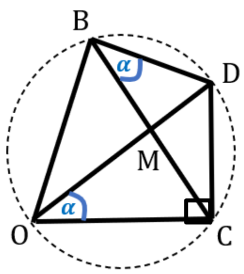
(2)

- $DB = DC$ (مماسان خارجان من نفس النقطة الى نفس الدائرة هما مماسان متساويان)
- $OB = OC$ (أنصاف أقطار الدائرة متساوية)
- ينتُج أنَّ الشكل $OBDC$ دالتون

- نستنتج من ذلك أنَّ : $BC \perp OD$ (أقطار الدالتون متعامدة) $\longleftarrow \measuredangle DMC = 90°$
- CE يُعامد AB $\longleftarrow \measuredangle CED = 90°$
- ينتُج أنَّ : الشكل الرُباعي $MDEC$ قابل للحصر في دائرة (شكل رُباعي فيه زاويتين متقابلتين مجموعهما 180 يُمكن حصرُه في دائرة)

ب)

<u>نجد d_1 :</u>



- $\measuredangle DBC = \measuredangle DOC$ (زوايا مُحيطيَّة مُقابلة لنفس القوس هي زوايا متساوية)
- $\measuredangle DCO = 90°$ (بيَّنا سابقا)
- $OD = d_1$ لأنَّهُ مُقابل للزاوية 90

$$\Downarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{OC}{OD} = \frac{R}{OD}$$

$$\Downarrow$$

$$R \div \cos(\alpha) = OD \quad \longrightarrow \quad \boxed{d_1 = OD = \frac{R}{\cos(\alpha)}}$$

<u>نجد d_2 :</u>

- $DC = d_2$ (الضلع DC مُقابل للزاوية 90)

$$OD^2 = OC^2 + DC^2 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{R}{\cos(\alpha)}\right)^2 = R^2 + DC^2 \quad \longrightarrow \quad DC^2 = \frac{R^2}{\cos^2(\alpha)} - R^2$$

$$\longrightarrow \quad DC^2 = R^2 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - 1\right) = R^2 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right) = R^2 \cdot \left(\frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right)$$

$$= R^2 \cdot \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\right) = R^2 \cdot \tan^2(\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$DC^2 = R^2 \cdot \tan^2(\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$DC = R \cdot \tan(\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d_2 = R \cdot \tan(\alpha)}$$

<u>نجد d_3 :</u>

- المُثلَّث ΔBCD هُو مُثلَّث مُتساوي الساقين $\Leftarrow$ $\measuredangle BCD = \alpha$
- ينتُج أنَّ : $\measuredangle BAC = 180 - \measuredangle ABC - \measuredangle BCA = 180 - \alpha - (90 + \alpha) = 90 - 2\alpha$

<u>قانون سينوس :</u>

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

R يرمُز لنصف القُطر

$$\frac{OD}{\sin(\measuredangle BAC)} = d_3$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\frac{R}{\cos(\alpha)}}{\sin(90 - 2\alpha)} = d_3$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\frac{R}{\cos(\alpha)}}{\sin(90 - 2\alpha)} = d_3$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{R}{\sin(90 - 2\alpha) \cdot \cos(\alpha)} = d_3}$$

ج)

$$\frac{d_2}{d_1}=\frac{d_1}{d_3}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{R\cdot\tan(\alpha)}{\frac{R}{\cos(\alpha)}}=\frac{\frac{R}{\cos(\alpha)}}{\frac{R}{\sin(90-2\alpha)\cdot\cos(\alpha)}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\tan(\alpha)}{\frac{1}{\cos(\alpha)}}=\frac{\frac{1}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{\sin(90-2\alpha)\cdot\cos(\alpha)}}$$

$$\downarrow$$

$$\tan(\alpha)\cdot\cos(\alpha)=\frac{\sin(90-2\alpha)\cdot\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\cos(\alpha)=\sin(90-2\alpha)$$

$$\downarrow$$

$$\sin(\alpha)=\sin(90-2\alpha)$$

$(k\in\mathbb{Z})$ $\alpha=90-2\alpha+360k$

$$\Downarrow$$

$$3\alpha=90+360k$$

$$\Downarrow$$

✓ $\alpha=30+120k$

$\alpha=180-(90-2\alpha)+360k$ $(k\in\mathbb{Z})$

$$\Downarrow$$

$$\alpha=90+2\alpha+360k$$

$$\Downarrow$$

$$-\alpha=90+360k$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha=-90+360k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\alpha = 30^\circ}$$

(الزاوية $\measuredangle DBC$ حادَّة)