

امتحان 5 – دوال بولينوم (لا يشمل تقعّرات)

- 4) معطاة الدالة: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + a^2$ ، حيث $a > 0$.
- أ. جدوا إحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع محور y بدلالة a .
- ب. جدوا إحداثيات النقاط القصوى للدالة $f(x)$ بدلالة a ، وحددوا نوعها.
- ج. (1) بينوا أن القيمة العظمى للدالة $f(x)$ موجبة دائماً لكل $a > 0$.
- (2) جدوا لأي قيم a يقطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ محور x في 3 نقاط مختلفة.
- د. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$ في الحالة التي يكون فيها $a = 2$.
- هـ. كم حلاً يوجد للمعادلة $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 = 0$ ؟ علّلوا.
- و. معطاة الدالة $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1 - k$ ، حيث k هو بارامتر. جدوا لأي قيم k يمسّ الرسم البياني للدالة $g(x)$ محور x .

أ. نجد إحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع محور y بدلالة a

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + a^2$$

نعوض $x = 0$ في الدالة:

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 - a^2 \cdot 0 + a^2 = a^2$$

$$(0, a^2)$$



ب. نجد إحداثيات النقاط القصوى للدالة $f(x)$ بدلالة a ، ونحدّد نوعها

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + a^2$$

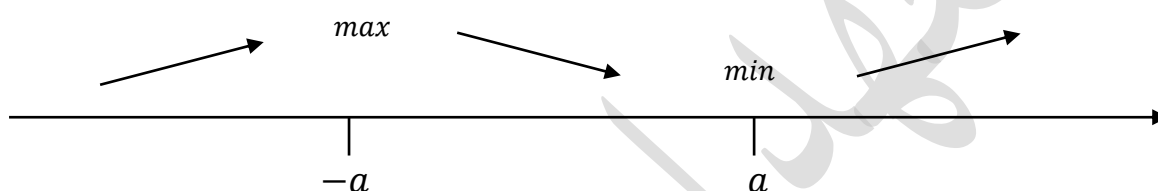
نشتقّ الدالة:

$$f'(x) = x^2 - a^2$$

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 = a^2$$

$$x = \pm a$$



$$f(a) = \frac{1}{3}a^3 - a^2a + a^2 = a^2 - \frac{2}{3}a^3$$

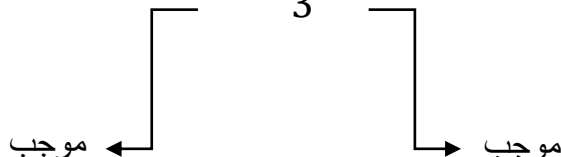
$$f(-a) = \frac{1}{3}(-a)^3 - a^2(-a) + a^2 = a^2 + \frac{2}{3}a^3$$

$$\max\left(-a, a^2 + \frac{2}{3}a^3\right) \quad \min\left(a, a^2 - \frac{2}{3}a^3\right)$$

ج. (1) نبين أنّ القيمة العظمى للدالة $f(x)$ موجبة دائماً لكلّ $a > 0$

ننظر الى إحداثي y للنقطة العظمى، وبما أنّ $a > 0$:

$$y = a^2 + \frac{2}{3}a^3$$



موجب + موجب = موجب

إذاً بما أنّ y دائماً موجب، القيمة العظمى دائماً موجبة



ج. (2) نجد لأيّ قيم a يقطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ محور x في 3 نقاط مختلفة

لكي تقطع الدالة محور x في ثلاثة نقاط، يجب ان تكون النقطة العظمى فوق المحور x والنقطة الصغرى تحت المحور x .

وضحنا في البند السابق أنّ إحداثي y للنقطة العظمى دائماً موجب، لذلك نجد قيم a التي تحقق أنّ النقطة الصغرى تكون تحت المحور x .

$$a^2 - \frac{2}{3}a^3 < 0$$

نقسم على a^2 لأنه موجب، وهكذا إشارة المتباينة لا تتغير

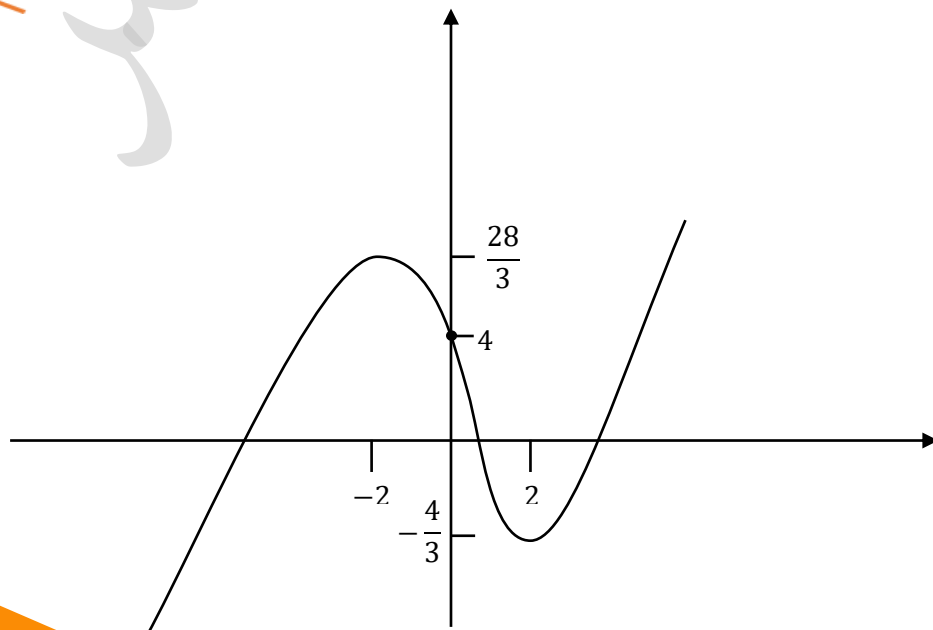
$$a^2 \left(1 - \frac{2}{3}a\right) < 0$$

$$1 - \frac{2}{3}a < 0$$

$$1 < \frac{2}{3}a$$

$$a > \frac{3}{2}$$

د. نرسم رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$ في الحالة التي يكون فيها $a = 2$



٥.

نجد كم حلًّا يوجد للمعادلة $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 = 0$

نلاحظ أنَّ الطرف الأيسر للمعادلة هي نفسها الدالة $f(x)$ ولكن بتعويض $a = 1$
نجد أصغر قيمة للدالة في هذه الحالة، ونستنتج منها تصرف الدالة:

$$y_{min} = a^2 - \frac{2}{3}a^3$$

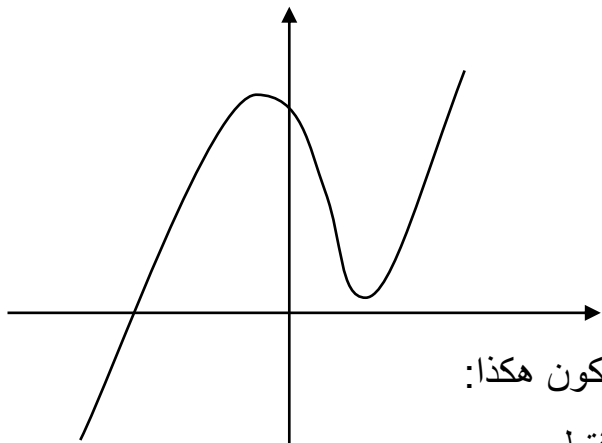
نعوض $a = 1$:

$$1^2 - \frac{2}{3}1^3 = \frac{1}{3}$$

موجب، نستنتج من هذا أنَّ رسمة الدالة ستكون هكذا:

إذا تقطع محور x في نقطة واحدة فقط

إذا فقط حل واحد

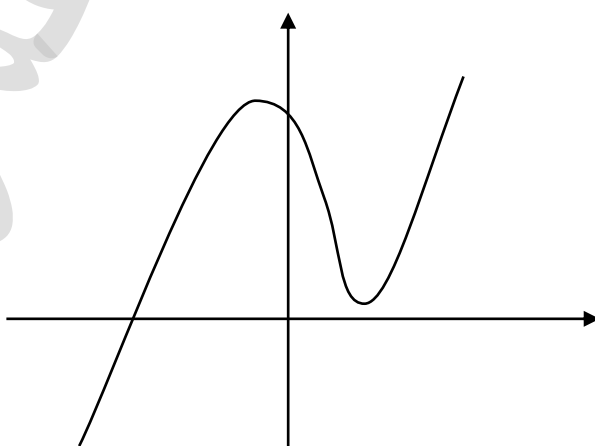


٦.

نجد لأيِّ قيم k يمسّ الرّسم البيانيّ للدالة $g(x)$ محور x

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1 - k$$

حسب الرّسم في البند هـ:



لكي تمسّ الدالة المحور x ، يجب أن تكون إحدى النّقاط القصوى واقعة على المحور x :

وجدنا إحداثيّ y للنقطة القصوى الصغرى وهو: $\frac{1}{3}$



إذا يجب أن نقوم بإزاحة الدالة عمودياً الى الأسفل بمقدار $\frac{1}{3}$ ، لذلك:

$$k = \frac{1}{3}$$

نجد إحداثي y للنقطة القصوى العظمى:

$$1^2 + \frac{2}{3}1^3 = \frac{5}{3}$$

إذاً يجب أن نقوم بإزاحة الدالة عمودياً الى الأسفل بمقدار $\frac{5}{3}$ لذلك:

$$k = \frac{5}{3}$$

⇓

$$k = \frac{1}{3} \text{ أو } k = \frac{5}{3}$$

