أسئلة قصيرة – صيف 2022 موعد ب

أ) برهنوا بواسطة الاستقراء او أي طريقة أخرى ان التساوي الذي امامكم يتحقق بالنسبة لكل n طبيعي:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

مرحلة الفحص:

نفحص الادعاء لـ $n = 1$:

$$1^2 = 1$$

أي نجمع الى الحد الذي قيمته 1 أي الحد الأول.

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2(1)+1)}{6}$$

$$1 = \frac{6}{6}$$

$$1 = 1$$

$$\Downarrow$$

الادعاء صحيح عندما $n = 1$

معهد إيهاب عمر

مرحلة الافتراض:

نفرض ان الادعاء صحيح لـ $n = k$ أي :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$$

مرحلة البرهان:

نبرهن ان الادعاء صحيح لـ $n = k+1$ أي نبرهن انه:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2}_{\text{حسب فرضية الاستقراء } \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}} + (k+1)^2 = \frac{(k+1) \cdot (k+1+1) \cdot (2(k+1)+1)}{6}$$

$$\frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

$$(k+1)\frac{(k \cdot (2k+1) + 6(k+1))}{6} = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

$$(k+1)\frac{(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

$$(k+1)\frac{(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$$

$$(k+1)\frac{\left(2k^2+4k+3k+6\right)}{6}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$$

$$(k+1)\frac{(k(2k+3)+2(2k+3))}{6}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$$

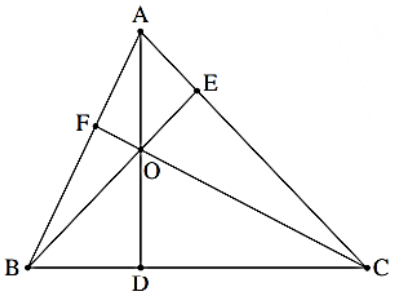
جملة انهاء:

من الفحص رأينا ان الادعاء صحيح لـ $n=1$ ومن الفرضية ان الادعاء صحيح لـ $n=k$ برهنا ان الادعاء صحيح أيضا لـ $n=k+1$ لذا فان الادعاء صحيح لكل n طبيعي.

معهد ايهاب عمر

ب. في مثلث حاد الزوايا ABC ، الارتفاعات AD, BE, CF يلتقون في النقطة O.

معطى مجموع ابعاد الرؤوس عن النقطة O هو 20 .



(1) برهنوا انه من الممكن حصر كل شكل من الاشكال الرباعية $AEOF\ ,BDOF\ ,CDOE$ في دائرة.

(2) ما هو مجموع محيطات الدوائر الحاصرة للأشكال الرباعية $AEOF\ ,BDOF\ ,CDOE$.

(1) **نبرهن المطلوب**

$$\sphericalangle AFO = \sphericalangle AEO = 90°$$

$$\sphericalangle BFO = \sphericalangle ODB = 90° \quad \text{(معطى)}$$

$$\sphericalangle ODC = \sphericalangle OEC = 90°$$

$$\Downarrow$$

يمكن حصر كل شكل من الاشكال الرباعية $BDOF\ ,CDOE$ و $AEOF$ في دائرة

$$\begin{pmatrix}\text{يمكن حصر شكل رباعي في دائرة}\\ \text{إذا، وفقط إذا، كان حاصل جمع}\\ \text{زاويتين متقابلتين فيه } 180°\end{pmatrix}$$

(2) إيجاد مجموع محيطات الدوائر الحاصرة للأشكال الرباعية

نصف قطر الدائرة الحاصرة لشكل الرباعي $CDOE$ هو OC.

نصف قطر الدائرة الحاصرة لشكل الرباعي AEOF هو OA.

نصف قطر الدائرة الحاصرة لشكل الرباعي BDOF هو OB.

معطى أن $\mathrm{OC}+\mathrm{OA}+\mathrm{OB}=20$

محيط الدائرة $= 2R\pi$

مجموع محيطات الدوائر $= \pi\cdot\mathrm{OC}+\pi\cdot\mathrm{OA}+\pi\cdot\mathrm{OB}$

مجموع محيطات الدوائر $= \pi\cdot(\mathrm{OC}+\mathrm{OA}+\mathrm{OB})=20\pi$

مجموع محيطات الدوائر $= 20\pi$

ج. معطى الدالة $f(x) = 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}$

(1) ما هو مجال تعريف الدالة $f(x)$ ؟

(2) معلوم ان خطوط تقارب الدالة $f(x)$ تتقاطع. جدوا المساحة بين خطوط التقارب. فسروا اجبتكم.

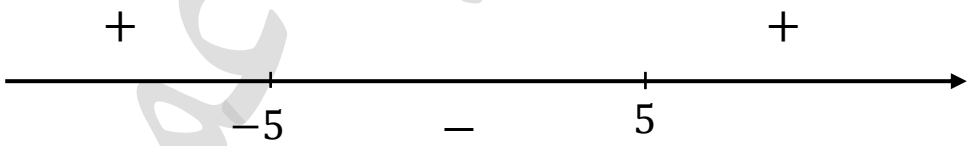
(1) **مجال تعريف الدالة $f(x)$**

$$x^2 - 25 > 0$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$



$x < -5$ أو $x > 5$

إيجاد المساحة المطلوبة (2)

المحاذيات العمودية:

$$x = \pm 5$$

المحاذيات الافقية:

$$\lim_{x\to\infty} 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 25}} = 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 3 + \frac{x}{x} = 3 + 1 = 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 25}} = 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 3 + \frac{x}{-x} = 3 - 1 = 2$$

$$(x > 0)\ y = 4$$

$$(x < 0)\ y = 2$$

طول المستطيل:

$$4 - 2 = 2$$

عرض المستطيل:

$$5 - (-5) = 10$$

$$S = 2 \cdot 10 = 20$$

$$S = 20$$

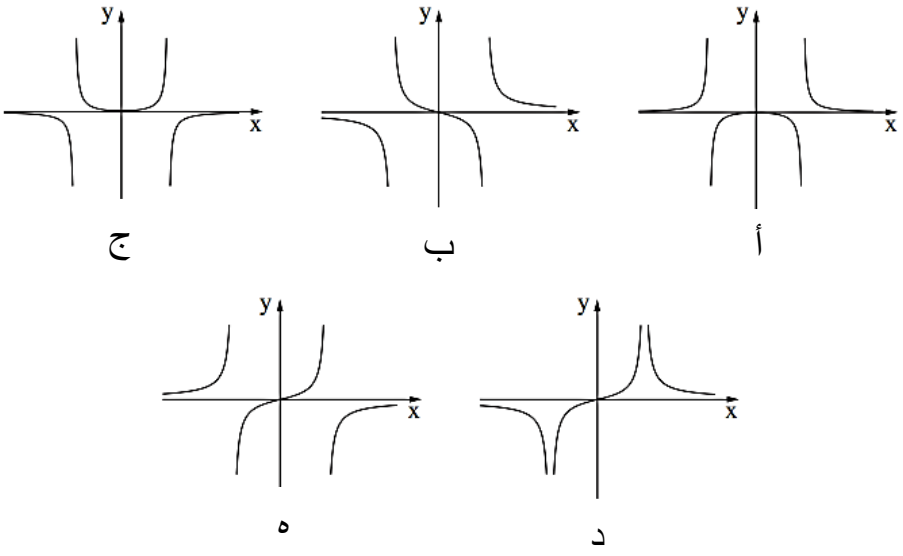
د. معطاه الدالة $f(x) = \frac{a \cdot x}{x^2-4}$ التي مجال تعريفها بـ $x \neq 2 , x \neq -2$

a بارمتر لا يساوي صفر.

أحد الرسوم أ – هـ التي امامكم تصف الدالة $f(x)$ عندما $a > 0$ واخرى تصف الدالة عندما $a < 0$

(1) أي من الرسوم الاتية تصف الدالة $f(x)$ عندما $a > 0$ ؟ عللوا اجبتكم.

(2) أي من الرسوم الاتية تصف الدالة $f(x)$ عندما $a < 0$ ؟ عللوا اجبتكم



(1) **الرسم الذي يصف الدالة $f(x)$ عندما $a > 0$**

$$f'(x) = \frac{a(x^2-4) - 2x(ax)}{(x^2-4)^2} = \frac{ax^2 - 4a - 2ax^2}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-ax^2 - 4a}{(x^2-4)^2} = \frac{-a(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

التعبيران:

(x^2+4) و $(x^2-4)^2$ موجبان بالتأكيد

وبما ان $a > 0$

اي المشتقة دائما سالبة وحسب العلاقة بين الدالة والمشتقة فأن الدالة دائما تنازلية.

أي الرسم الملائم هو ب

(2) **الرسم الذي يصف الدالة $f(x)$ عندما $a < 0$**

$$f'(x) = \frac{-a(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

$$a < 0$$

اي المشتقة دائما موجبة وحسب العلاقة بين الدالة والمشتقة فأن الدالة دائما تصاعدية.

أي الرسم الملائم هو هـ