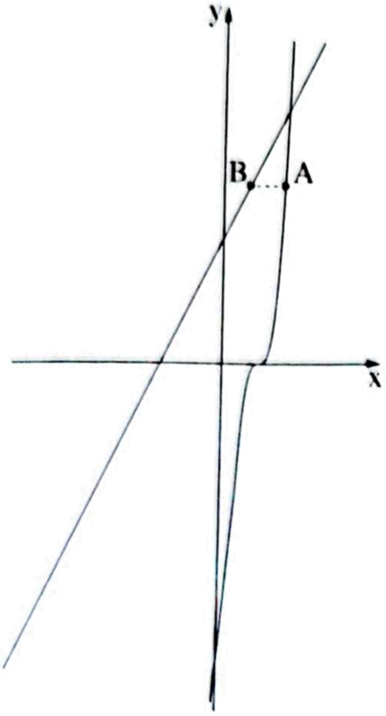
صيف ب 2026 – قيم قصوى



8. الرسم الذي أمامكم يصف الرسم البيانيّ للدالّة $f(x) = (4x - 2)^3$
والمستقيم $y = 3x + b$.
b هو پارامتر موجب .
النقطة A تقع على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ بحيث إحداثيها الـ x أصغر من الإحداثيّ x لنقطة تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المستقيم المعطى.
النقطة B تقع على المستقيم المعطى بحيث القطعة AB توازي المحور x .
نرمز بـ t إلى الإحداثيّ x للنقطة A .
معطى أنّ: $0 \le t \le 0.7$.

أ. عبّروا بدلالة b وَ t عن الإحداثيّ x للنقطة B .

ب. (1) جدوا قيمة t التي بالنسبة لها طول القطعة AB هو أصغر ما يمكن.

(2) جدوا قيمة t التي بالنسبة لها طول القطعة AB هو أكبر ما يمكن.

أ. نعبّر بدلالة b وَ t عن الإحداثيّ x للنّقطة B

بما أنّ النقطة A على الرسم البياني للدالّة، فإنّ:

$$A(t, (4t - 2)^3)$$

وبما أنّ القطعة AB توازي المحور x، فإنّ النقطتين A و B لهما نفس إحداثيّ الـy

$$y_B = y_A = (4t - 2)^3$$

النقطة B تقع على المستقيم $y = 3x + b$، لذلك:

$$3x_B + b = (4t - 2)^3$$

$$3x_B = (4t - 2)^3 - b$$

$$x_B = \frac{(4t - 2)^3 - b}{3}$$

ب. (1) نجد قيمة t التي بالنّسبة لها يكون طول القطعة AB هو أصغر ما يمكن

من المعطى أنّ إحداثي x للنقطة A أصغر من إحداثي التقاطع؛ نستنتج أنّ النقطة B تقع على يسار النقطة A:

$$AB = x_A - x_B$$

$$AB = t - \frac{(4t-2)^3 - b}{3} = t + \frac{-(4t-2)^3 + b}{3}$$

دالّة الهدف:

$$AB = t + \frac{b}{3} - \frac{(4t-2)^3}{3}$$

$$AB' = 1 - (4t-2)^2 \cdot 4$$

$$AB' = 0$$

$$1 - 4(4t-2)^2 = 0$$

$$(4t-2)^2 = \frac{1}{4}$$

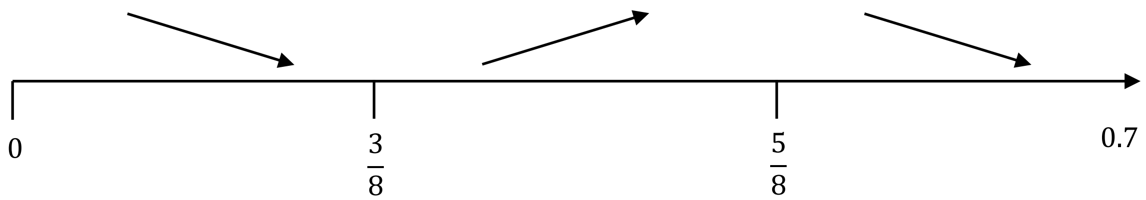
$$4t - 2 = \pm\frac{1}{2}$$

$$4t - 2 = \frac{1}{2} \qquad\qquad 4t - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$4t = 2.5 \qquad\qquad 4t = 1.5$$

$$t = \frac{5}{8} \qquad\qquad t = \frac{3}{8}$$

نفحص الإحداثيّات:



نعوّض الحدود في دالّة الهدف لنجد القيم:

$$AB = t + \frac{b}{3} - \frac{(4t-2)^3}{3}$$

$$AB(0) = \frac{b}{3} + \frac{8}{3} = \frac{b+8}{3}$$

$$AB\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{b + \frac{9}{8} - \left(4 \cdot \frac{3}{8} - 2\right)^3}{3} = \frac{b}{3} + \frac{5}{12}$$

$$AB\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{b + \frac{15}{8} - \left(4 \cdot \frac{5}{8} - 2\right)^3}{3} = \frac{b}{3} + \frac{7}{12}$$

$$AB(0.7) = \frac{b + \frac{15}{8} - \left(4 \cdot \frac{5}{8} - 2\right)^3}{3} = \frac{b}{3} + \frac{397}{750}$$

نلاحظ أنّ أكبر قيمة ممكنة هي $\frac{8}{3} + \frac{b}{3}$ وأصغر قيمة ممكنة هي $\frac{5}{12} + \frac{b}{3}$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{3}{8}$$

ب. (2) نجد قيمة t التي بالنّسبة لها يكون طول القطعة AB هو أكبر ما يمكن

حسب البند السّابق:

يتحقّق ذلك في $t = 0$