إيهاب عمر

بحث دالَّة صيف 2019

سؤال 6 :

معطاة عائلة الدوالّ : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$. a هو بارامتر يحقّق $-4<a<2$.

أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) فسّر لماذا لا يوجد للدالّة $f(x)$ خطّ تقارب موازٍ للمحور y .

(3) جد معادلات خطوط التقارب الموازية للمحور x للدالّة $f(x)$.

(4) ما هي إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين؟

(5) جد مجالات موجبيّة وسالبيّة الدالّة $f(x)$.

ب. (1) عبّر بدلالة a عن الإحداثيّات x التي بالنسبة لها $f'(x)=0$ (إذا وُجدت مثل هذه الإحداثيّات).

(2) جد قيمة a التي بالنسبة لها $f'(x)\neq 0$ لكلّ x في مجال التعريف.

عوِّض $a=-1$ في معادلة الدالّة $f(x)$ ، وأجب عن البندين "جـ - د" .

جـ. (1) ما هي مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات)؟

(2) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

د. احسب $\int_{3}^{4}\frac{1}{f(x)}dx$. بإمكانك إبقاء جذر في إجابتك.

أ (1)

$$2x - a \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{a}{2}$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$(x+2)(x-1) \geq 0$$

$$, x \leq -2, x \geq 1$$

(2) لأن $-2 < \frac{a}{2} < 1$.

(3)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

(4) مع محور y لا يوجد تقاطع. مع محور x :

$$0 = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$$

$$0 = \sqrt{x^2+x-2}$$

$$0 = (x+2)(x-1)$$

$$x = -2,1$$

$$(-2,0), (1,0)$$

(5) لأن $-2 < \frac{a}{2} < 1$ فإن $x < 2-$ الدالة سالبة وفي $x > 1$ الدالة موجبة

ب (1)

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x-2}}(2x+1)(2x-a) - 2\sqrt{x^2+x-2}}{(2x-a)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)(2x-a) - 4(x^2+x-2)}{2\sqrt{x^2+x-2}(2x-a)^2}$$

$$= \frac{-2(1+a)x - a + 8}{2\sqrt{x^2+x-2}(2x-a)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$-2(1+a)x - a + 8 = 0$$

$$x = \frac{8-a}{2(1+a)}$$

(2) لكي نجد ان المشتقة لا تساوي صفر لاي x في مجال تعريفها هذا يعني اننا يجب ان نثبت انه لـ $f'(x) = 0$ لا يوجد حل,

مما يعني ان نبحث عن حالة تحقق انه $x = \frac{8-a}{2(1+a)}$ لا تتحقق :

وهي انَّ المقام يساوي 0 : $2(1+a) = 0 \;\rightarrow\; 1+a = 0 \;\rightarrow\; a = -1$

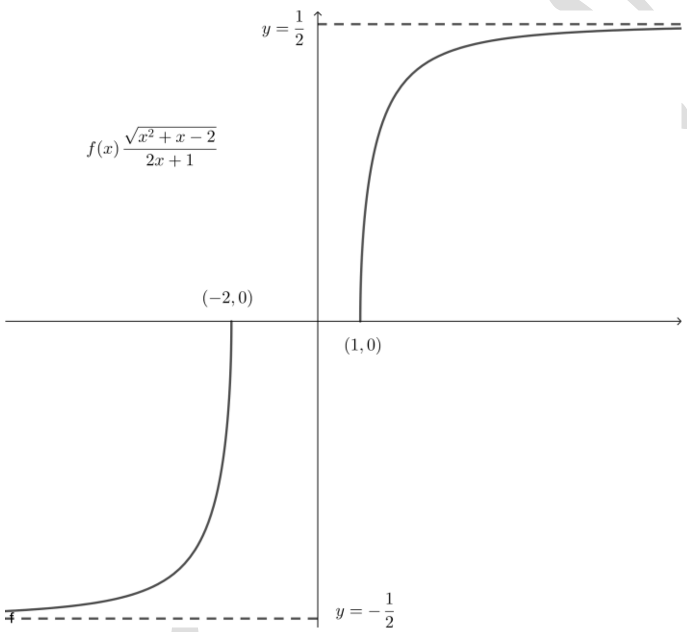
ج (1)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x+1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x+1}\right)' = \frac{9}{2\sqrt{x^2+x-2}(2x-a)^2} > 0$$

الدالة تصاعدية في مجال تعريفها.

(2)



د

$$\int_3^4 \frac{1}{f(x)}dx = \int_3^4 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}}dx = \int_3^4 \left(2\sqrt{x^2+x-2}\right)' dx =$$

$$= 2\sqrt{x^2+x-2}\Big|_3^4 = 2\sqrt{18} - 2\sqrt{10} = 2\sqrt{2}(3-\sqrt{5})$$