صيف موعد خاص 2021

سؤال 4 :

معطاة الدالّة: $f(x)=\dfrac{e^{2x}+3}{e^{x}-1}-7$.

أ. 1) جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

2) اكتب معادلة خطّ التقارب المعامد للمحور x ، للدالّة $f(x)$.

ب. جد إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدِّد نوع هذه النقطة.

جـ. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$.

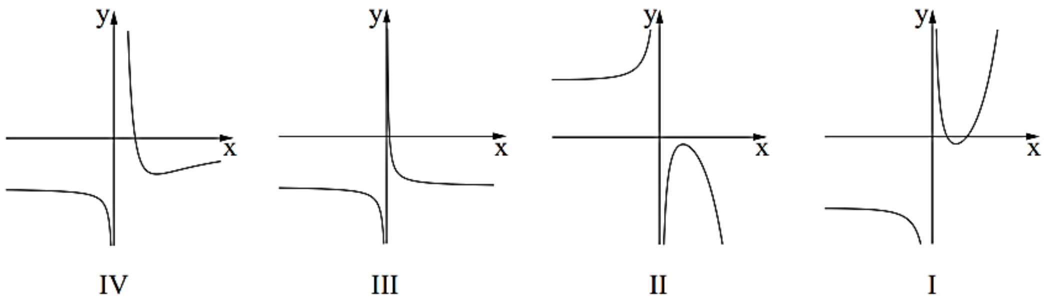
د. 1) جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

2) أحد الرسوم البيانيّة I–IV التي في آخر السؤال يصف الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$. حدِّد أيّ رسم بيانيّ منها، وعلّل تحديدك.

هـ. معطاة الدالّة $g(x)$ التي مجال تعريفها مطابق لمجال تعريف الدالّة $f(x)$.

مشتقّة الدالّة $g(x)$ تحقّق: $g'(x)=f(x)$.

جد الإحداثيّات x للنقاط القصوى للدالّة $g(x)$ ، وحدِّد نوع هذه النقاط.



أ)(1) نجد مجال التعريف:

$$f(x) = \frac{e^{2x}+3}{e^x-1} - 7$$

$$e^x - 1 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$e^x \neq 1$$

$$\Downarrow$$

$$x \neq \ln 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x \neq 0}$$

(2) نجد خط التقارب العامودي:

$$\boxed{x = 0}$$

(3) نجد احداثيات النقطة القصوى للدالة:

$$f(x)=\frac{e^{2x}+3}{e^x-1}-7$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^x-1)-(e^{2x}+3)e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=\frac{2e^{3x}-2e^{2x}-e^{3x}-3e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=\frac{e^{3x}-2e^{2x}-3e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^{2x}-2e^x-3)}{(e^x-1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$0=\frac{e^x(e^{2x}-2e^x-3)}{(e^x-1)^2}$$

$$\boxed{\cdot\,(e^x-1)^2}\qquad\Downarrow$$

$$0=e^x(e^{2x}-2e^x-3)$$

$$0=e^x \qquad\qquad e^{2x}-2e^x-3=0$$

تكملة الحل في الصفحة التالية.

$$(e^x - 3)\cdot(e^x + 1) = 0$$

$$e^x - 3 = 0 \qquad e^x + 1 = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$e^x = 3 \qquad e^x = -1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x = \ln 3 \qquad \cancel{x = 0}$$

x	-4	0	1	$\ln 3$	4
f'(x)	$-$	مجال غير معرف	$-$	0	$+$
f(x)	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

النقطة القصوى للدالة $\leftarrow (\ln 3\,, -1)_{min}$

(ج) <u>نجد مجالات التصاعد و التنازل للدالة</u>:

تصاعد: $x > \ln 3$

تنازل: $x < 0\ ,0 < x < \ln 3$

د) نجد نقاط تقاطع الدالة مع المحاور:

التقاطع مع محور x:

$$f(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \frac{e^{2x}+3}{e^x-1} - 7$$

$\boxed{\cdot\, e^x - 1}$

$$\Downarrow$$

$$0 = e^{2x} + 3 - 7(e^x - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = e^{2x} + 3 - 7e^x + 7$$

$$\Downarrow$$

$$0 = e^{2x} - 7e^x + 10$$

$$\Downarrow$$

$$0 = (e^x - 5)(e^x - 2)$$

$$e^x - 5 = 0 \qquad e^x - 2 = 0$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$e^x = 5 \qquad e^x = 2$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$x = \ln 5 \qquad x = \ln 2$$

نقطة التقاطع مع محور x ← $(\ln 5 , 0), (\ln 2 , 0)$.

التقاطع مع محور y:

$$f(0)$$

لا يمكننا تعويض 0 لأنه خارج مجال التعريف

$$\Downarrow$$

لا يوجد تقاطع مع محور y .

(2) نجد الرسم المناسب:

- الرسم البياني I : يُحقّق جميع الشُروط ✓
- الرسم البياني II : لا يحقق وجود النقطة القصوى $(\ln 3, -1)min$ ✗
- الرسم البياني III لا يحقق وجود النقطة القصوى $(\ln 3, -1)min$ ✗
- الرسم البياني IV : لا يحقق وجود نقطتا تقاطع مع محور x ✗

$$\boxed{\text{الرسم البياني I}}$$

(ه) نجد النقاط القصوى للدالة $g(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$g'(x) = f(x)$$ (معطى)

$$\Downarrow$$

$$f(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \ln 5\,, x = \ln 2$$ (وجدناه في بنود سابقة)

$$\Downarrow$$

x	-4	0	0.5	$\ln 2$	1	$\ln 5$	2
$g'(x) = f(x)$	$-$	مجال غير معرف	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\Downarrow$$

النقاط القصوى للدالة $g(x) \leftarrow x_{min} = \ln 5\ , x_{max} = \ln 2$.

إيهاب عمر