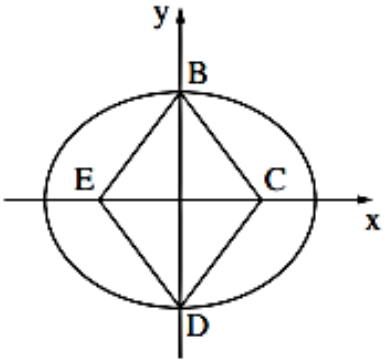
سُؤال 1 :



معطى المعيَّن BCDE .

الرأسان B وَ D يقعان على المحور y ،

والرأسان C وَ E يقعان على المحور x .

معطى أنّ: طول ضلع المعيَّن هو 5 ،

وطول ارتفاعه هو 4.8 ،

وطول القطر BD أكبر من طول القطر CE .

عبر الرأسين B وَ D يمرّ قطع ناقص أصليّ (אליפסה קנונית) (انظر الرسم)، بؤرتاه هما النقطتان C وَ E .

أ. (1) جد إحداثيّات رؤوس المعيَّن.

(2) جد معادلة القطع الناقص.

قطع مكافئ معادلته $y^2 = 2px$ يقطع القطع الناقص في الربع الأوّل في النقطة M .

معطى أنّ: الإحداثيّ y لِـ M هو $\sqrt{15}$.

ب. برهن أنّ بؤرة القطع المكافئ تقع في النقطة C .

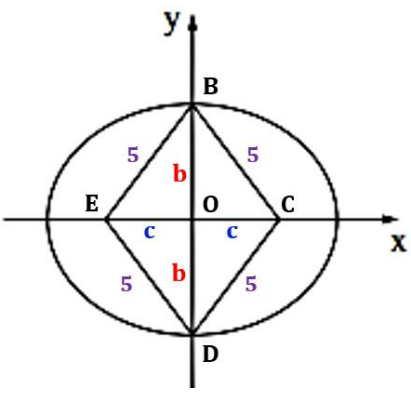
جـ. يمرّرون عبر النقطة E مستقيمًا يوازي المحور y .

P هي نقطة على القطع المكافئ بُعدها عن هذا المستقيم هو k .

جد النسبة $\frac{PC}{k}$. فسّر.

أ) (1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ (مُعادلة القطع الناقص)



نرمُز نُقطة أصل المحاور : O

$$BO = b \quad , \quad CO = c$$

- ننظُر الى المُثلَّث القائم BOC :

$b^2 + c^2 = 5^2$ (قانون فيثاغورس)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{b^2 + c^2 = 25}$$

مُعادلة 1

- نحسب مساحة المُعيَّن BCDE :

من جهة :

$$S_{\text{معين}} = (\text{الضلع}) \cdot (\text{الارتفاع})$$

$$\Downarrow$$

$$S_{BCDE} = 5 \cdot 4.8 = \boxed{24}$$

من جهة أُخرى :

$$S_{\text{معين}} = \frac{(\text{القطر الأوَّل}) \cdot (\text{القطر الثاني})}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{BCDE} = \frac{(2b) \cdot (2c)}{2} = \boxed{2bc}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2bc = 24}$$

مُعادلة 2

معهد إيهاب عمر

إيهاب عمر

$$\begin{cases} ① \quad b^2 + c^2 = 25 \\ ② \quad 2bc = 24 \end{cases}$$

$$② \quad 2bc = 24 \quad \longrightarrow \quad bc = 12 \quad \longrightarrow \quad b = \frac{12}{c}$$

$$① \quad b^2 + c^2 = 25 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{12}{c}\right)^2 + c^2 = 25 \quad \longrightarrow \quad \frac{144}{c^2} + c^2 = 25$$

$$\longrightarrow \quad 144 + c^4 = 25c^2 \quad \longrightarrow \quad c^4 - 25c^2 + 144 = 0 \quad \longrightarrow \quad (c^2 - 9) \cdot (c^2 - 16) = 0$$

$c^2 - 9 = 0 \rightarrow c = \pm 3$ ، $c^2 - 16 = 0 \rightarrow c = \pm 4$

c هُو بارامتر موجب

$$\Downarrow$$

$$c = 3 \quad , \quad c = 4$$

c = 3 $\quad b^2 + c^2 = 25 \quad \longrightarrow \quad b^2 + 3^2 = 25 \quad \longrightarrow \quad b^2 = 16 \quad \longrightarrow \quad b = 4$

c = 4 $\quad b^2 + c^2 = 25 \quad \longrightarrow \quad b^2 + 4^2 = 25 \quad \longrightarrow \quad b^2 = 9 \quad \longrightarrow \quad b = 3$

$c = 3 \quad , \quad b = 4$

$c = 4 \quad , \quad b = 3$

مُعطى أنَّ طول القُطر BD أكبر من طول القطر CE ، أي أنَّ نصف القُطر BD أكبر من نصف القُطر CE . ولهذا فإنَّ b أكبر من c .

$$\Downarrow$$

$$c = 3 \quad , \quad b = 4$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} B\ (0,4) \\ C\ (3,0) \\ D\ (0,-4) \\ E\ (-3,0) \end{array}}$$

(2)

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (أنظر الى נוסחאון)

$$\Downarrow$$

$$3 = \sqrt{a^2 - 4^2}$$

$$\Downarrow$$

$$9 = a^2 - 16$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = 25$$

$\Downarrow$ (a هُو بارامتر موجب)

$$\boxed{a = 5}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

معهد إيهاب عمر

إيهاب عمر

ب)

نجد M :

$$y_M = \sqrt{15}$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \longrightarrow \quad \frac{x^2}{25}+\frac{\left(\sqrt{15}\right)^2}{16}=1 \quad \longrightarrow \quad \frac{x^2}{25}=\frac{1}{16} \quad \longrightarrow \quad x^2=\frac{25}{16} \quad \longrightarrow \quad x=\pm\frac{5}{4}$$

(M تقع في الرُبع الأوَّل) $\longrightarrow$ $\boxed{x_M=\frac{5}{4}}$

M تقع على القطع المُكافئ $y^2=2px$

$\Downarrow$

$$\left(\sqrt{15}\right)^2=2p\cdot\frac{5}{4}$$

$\Downarrow$

$$15=p\cdot\frac{5}{2}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{p=6}$$

$\Downarrow$

بُؤرة القطع المُكافئ : $F(3,0)$

وجدنا سابقا : $C(3,0)$

$\Downarrow$

بُؤرة القطع المُكافئ تقع في النُقطة C

معهد إيهاب عمر

إيهاب عمر

ج)

نُمرر مُستقيم عبر النُقطة E مُوازي للمحور y

$\Downarrow$

مُعادلة هذا المُستقيم : $x = -3$

مُعادلة القطع المُكافئ : $y^2 = 12x$

$\Downarrow$

دليل القطع المُكافئ : $x = -3$

المُستقيم في السُؤال هُو نفسه دليل القطع المُكافئ

✓ P هي نُقطة على القطع المُكافئ بُعدها عن المُستقيم المنشود هُو k , نستنتج من ذلك أنّ بُعد النُقطة P عن دليل القطع المُكافئ هُو k أيضاً .

البُعد بين نُقطة على القطع المُكافئ والدليل تُساوي البُعد بين النُقطة والبُؤرة

$\Downarrow$ **النُقطة C هي بُؤرة القطع المُكافئ**

البُعد بين النُقطة P والدليل $= PC$

$\Downarrow$

$PC = k$

$$\frac{PC}{k} = \frac{k}{k} = 1$$