بحث دالة كسريَّة شتاء مُتأخر 2021

سُؤال 7:

معطاة الدالّة $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$. a هو پارامتر.

أ. جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

ب. (1) بالنسبة لأيّة قيَم للپارامتر a ، لا توجد نقاط قصوى للدالّة $f(x)$ ؟ علّل.

(2) في الحالات التي توجد فيها نقاط قصوى للدالّة $f(x)$ ، عبّر بدلالة a عن إحداثيّات هذه النقاط، وحدّد نوع هذه النقاط.

جـ. ارسم على حِدة رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$ لـكلّ واحد من المجالات i-iii للپارامتر a التي أمامك:

i $a>0$

ii $a<0$

iii $a=0$

معطاة الدالّة $g(x)=f(x)-b$. b هو پارامتر.

معطى أنّ الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ يقطع المحور x في نقطتين.

د. (1) جد مجال الپارامتر a . علّل.

(2) عبّر عن مجال الپارامتر b بدلالة a . علّل.

أ)

$$f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$$

$$\text{المقام} \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{x}\neq 0 \quad \longrightarrow \quad x\neq 0$$

$$\text{تحت الجذر} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad x\geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x>0}$$

ب) (1)

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x}-(x+a)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{a}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}}{2x}$$

$$f'(x)=0\ \longrightarrow\ \frac{\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}}{2x}=0\ \longrightarrow\ \sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}=0$$

$$\longrightarrow\ x-a=0\ \longrightarrow\ \boxed{x=a}$$

في حال كان $a\le 0$ لا يكون نُقاط قُصوى وذلك لأنَّ x غير مُعرَّف في هذا المجال .

(2)

x		0		a	
f '(x)			$-$	0	$+$
f(x)			↘	min	↗

$$\left\{\begin{array}{l} f'\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\sqrt{\frac{a}{2}}-\frac{a}{\sqrt{\frac{a}{2}}}}{2\cdot\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{2a}}{a}=\frac{\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\right)}{a}=\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{a}}\ \longrightarrow\ \frac{(-)}{(+)}\ \longrightarrow\ (-) \\ f'(2a)=\frac{\sqrt{2a}-\frac{a}{\sqrt{2a}}}{2\cdot 2a}=\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{\frac{a}{2}}}{4a}=\frac{\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{4a}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{4\sqrt{a}}\ \longrightarrow\ \frac{(+)}{(+)}\ \longrightarrow\ (+) \end{array}\right\}$$

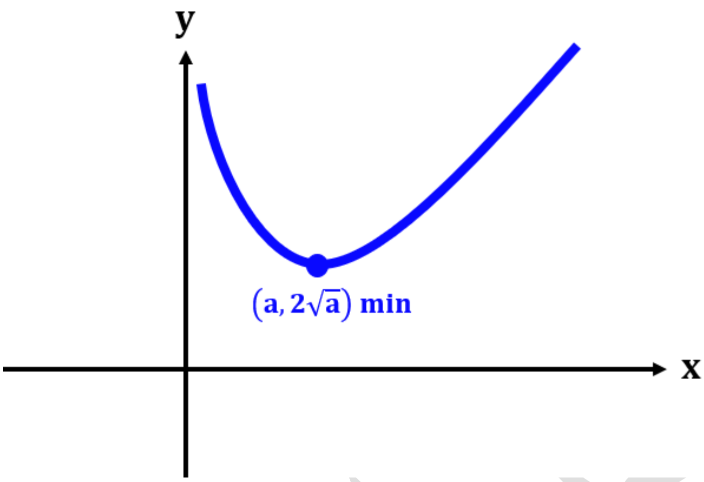
$$f(a)=\frac{a+a}{\sqrt{a}}=\frac{2a}{\sqrt{a}}=2\sqrt{a}\ \longrightarrow\ \boxed{\left(a\,,2\sqrt{a}\right)\ \min}$$

ج)

. i

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}} = \frac{a}{0} = \infty$$

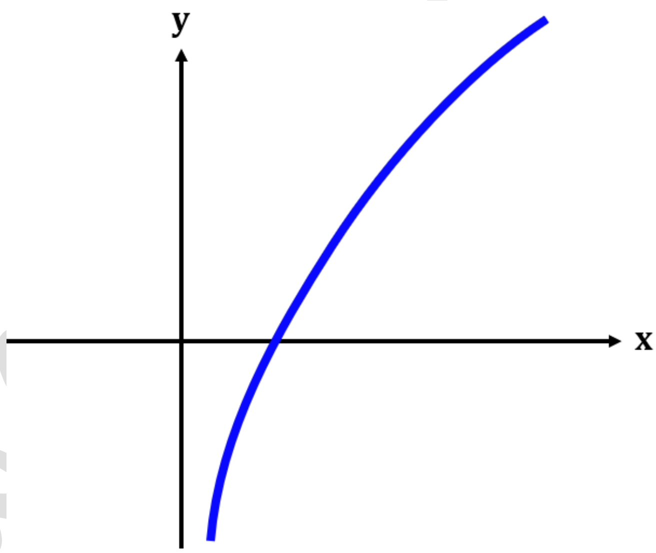
$$x = 0$$



. ii

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}} = \frac{a}{0} = -\infty$$

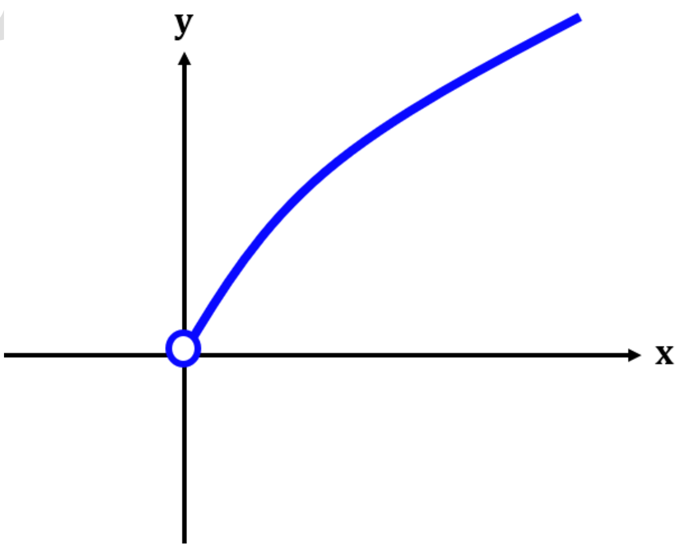
$$x = 0$$



. iii

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}} = 0$$

ثغرة (0,0)



د) (1)

الدالَّة $g(x)$ هي عبارة عن إزاحة الدالَّة $f(x)$ الى الأسفل بمقدار b خُطوات .

الرسم البياني الوحيد للدالَّة $f(x)$ في الفرع السابق الذي اذا أزحناه الى أسفل قد يتقاطع مع محور x في نُقطتين هُو الرسم (i) وهُو عندما يكون $a > 0$.

$$\boxed{a > 0}$$

(2)

يجب أن يكون b أكبر من احداثي y للنُقطة القُصوى في الدالَّة $f(x)$ من أجل يتقاطع الرسم البياني للدالَّة $g(x)$ مرَّتين مع المحور x .

$$\boxed{b > 2\sqrt{a}}$$