أسئلة قصيرة – شتاء 2023

أ. معطى أنّه لكلّ n طبيعيّ يتحقّق:

$$1\cdot2+4\cdot7+7\cdot12+\ldots+(3n-2)(5n-3)=n(5n^2-2n-1)$$

(1) احسبوا قيمة التّعبير: $7\cdot12+10\cdot17+\ldots+58\cdot97$

معطى أنه لكلّ n طبيعي يتحقق:

$$1\cdot2+4\cdot7+7\cdot12+\ldots+(3n-2)(5n-3)+(3n+1)(5n+2)=(n+1)(5n^2+8n+C)$$

(2) جدوا قيمة C.

(1) **إيجاد قيمة التعبير المطلوب**

نجد قيمة n

$$3n-2=58$$

$$3n=60$$

$$n=20$$

$$7\cdot12+10\cdot17+\cdots+58\cdot97=n(5n^2-2n-1)-1\cdot2-4\cdot7$$

$$7\cdot12+10\cdot17+\cdots+58\cdot97=20(5(20)^2-2(20)-1)-2-28$$

$$=39180-30=39150$$

$$\Downarrow$$

$$7\cdot12+10\cdot17+\cdots+58\cdot97=39150$$

(2) **إيجاد قيمة C**

معطى أن التعبير المعطى يتحقق لكل n طبيعي. لذا، نعوض $n=1$

$$(3(1)-2)(5(1)-3)+(3(1)+1)(5(1)+2)=1\cdot 2+4\cdot 7$$

$$1\cdot 2+4\cdot 7=(1+1)\left(5\cdot 1^2+8\cdot 1+C\right)$$

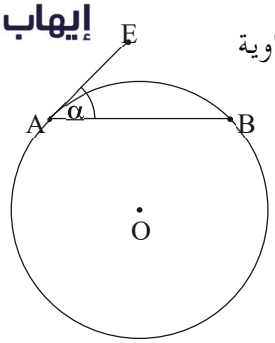
$$30=2(13+C)$$

$$30=26+2C$$

$$C=2$$

معهد ايهاب عمر

ب. النّقطة A تقع على دائرة مركزها O. يمرّرون مماسًا للدائرة عبر النّقطة A، ويكوّن زاوية مقدارها α <u>درجات</u> مع الوتر AB (انظروا الرسم).



(1) عبّروا بدلالة α عن الزاوية AOB.

(2) عبّروا بدلالة α عن النّسبة بين طول القوس AB الصغير وبين محيط الدائرة.

(1) إيجاد ∢AOB بدلالة α

(I) في الدائرة، الزاوية المحصورة بين مماس ووتر، تساوي الزاوية المحيطية المتّكئة على الوتر من الجهة الأخرى.

(II)الزاوية المركزية للوتر تساوي ضعف الزاوية المحيطية.

$$\Longrightarrow \sphericalangle AOB = 2\alpha$$

(2) إيجاد النسبة المطلوبة بدلالة α

نرمز بـ R لنصف قطر الدائرة.

نجد طول القوس AB:

$$\widehat{AB} = \frac{2\alpha}{360} \cdot (\text{محيط الدائرة})$$

$$\widehat{AB} = \frac{2\alpha}{360} \cdot 2\pi R$$

$$\frac{\widehat{AB}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\frac{2\alpha}{360} \cdot 2\pi R}{2\pi R} = \frac{2\alpha}{360} = \frac{\alpha}{180}$$

النسبة بين طول القوس AB الصغير وبين محيط الدائرة هي $\frac{\alpha}{180}$.

ج. معطاة الدّالّة $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ المعرّفة لكلّ x يختلف عن 0.

(1) جدوا معادلات خطوط التّقارب المعامدة للمحوريْن للدّالّة f(x).

(2) معطاة الدّالّة $g(x)=k\cdot f(x+3)$. $k>0$ هو بارامتر.

جدوا قيمة k التي بالنّسبة لها يكون البعد بين خطوط التّقارب الأفقيّة للدّالّة g(x) هو 10. علّلوا إجابتكم.

(1) إيجاد خطوط التقارب المعامدة للمحاور للدالة f(x)

مجال تعريف الدالة:

$$x \neq 0$$

$$\Longrightarrow x=0 \text{ محاذية عامودية}$$

المحاذية الافقية:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{4x^2}}{x}=\frac{2|x|}{x}=\begin{cases}\frac{2x}{x}=2\\ \frac{-2x}{x}=-2\end{cases}$$

$$y=2\ (x>0)$$

$$y=-2\ (x<0)$$

(2) **قيمة k**

معطى أن $g(x) = k \cdot f(x+3)$

$g(x)$ هي عبارة عن إزاحة أفقية للدالة $f(x)$ الى اليسار بـ 3 درجات، وأيضا، إزاحة ضرب بـk مرات على قيَم الـ y للدالة $f(x)$.

بما أن الازاحة الافقية لا تؤثر على قيَم ال y، وفقط إزاحة الضرب تؤثر على هذه القيَم، فإن المحاذيات الافقية ستصبح على النحو التالي:

$$y = 2k \ (x > 0)$$

$$y = -2k \ (x < 0)$$

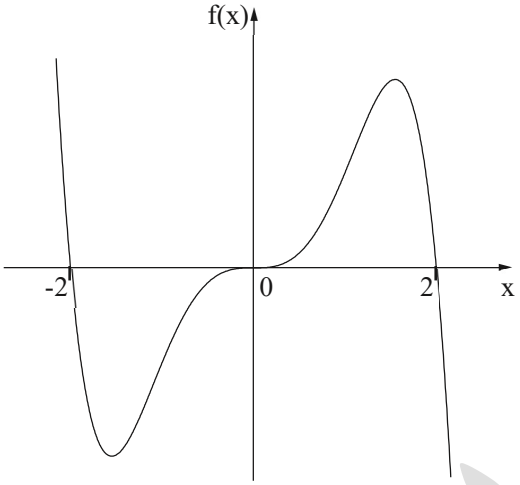
$$2k - (-2k) = 10$$

$$4k = 10$$

$$k = 2.5$$

معهد إيهاب عمر

د. $f(x)$ هي دالّة فرديّة معرّفة لكلّ x. الرّسم البيانيّ الذي أمامكم يصف الدّالّة $f(x)$.



معطاة الدّالّة $g(t)$ المعرّفة في المجال $-2 \le t \le 2$ وتحقّق: $g(t) = \int_{-2}^{t} f(x)dx$.

(1) حدّدوا بأيّ مجال تتنازل الدّالّة $g(t)$.

(2) هل توجد قيَم لـ t (في المجال $-2 \le t \le 2$) التي بالنّسبة لها تكون الدّالّة $g(t)$ موجبة؟ علّلوا إجابتكم.

(3) هل للدّالّة $g(t)$ يوجد نقاط التواء؟ علّلوا إجابتكم.

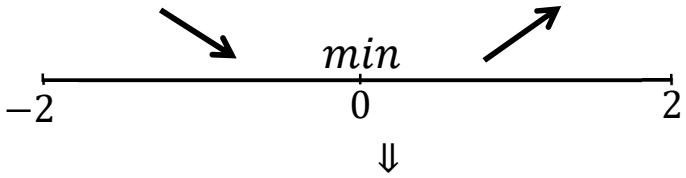
(1) إيجاد مجال تنازل الدالة $g(t)$

معطى أنّ $g(t) = \int_{-2}^{t} f(x)dx$

$\Rightarrow g'(t) = f(x)$

- **عندما تكون المشتقة موجبة، تكون الدالة تصاعدية.**
- **عندما تكون المشتقة سالبة، تكون الدالة تنازلية.**

من الرسم نرى ان $f(x)$:



⇓

الدالة تنازلية: $-2 \le x \le 0$

(2) فحص المطلوب

بما أنّ $g(t) = \int_{-2}^{t} f(x)dx$، وبما أنّ الدالة $g(t)$ هي دالة فردية (أي أن المساحتين الظاهرتين في الرسم متساويتين)، فإنّ:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \underbrace{\int_{-2}^{0} f(x)dx} + \int_{0}^{2} f(x)dx = 0$$

قيمة هذا التكامل ستكون سالبة لأن المساحة تقع تحت محور x وسقفها أيضا محور x.

أيّ أنّه في مجال الـt المعطى $-2 < t < 2$ ستكون قيمة الدالة $g(t)$ إما صفر أو سالبة.

$\Longleftarrow$ لا توجد قيمة لـt تحقق المعطى.

(3) فحص وجود نقاط التواء للدالة $g(t)$

حسب العلاقة بين الدالة والمشتقة، فإن النقاط القصوى في **المشتقة** هي نقاط التواء في **الدالة**، وحسب الرسم أعلاه، يوجد نقاط قصوى للدالة $f(x)$ والتي هي مشتقة الدالة $g(t)$.

$\Longleftarrow$ نعم يوجد نقاط التواء للدالة $g(t)$.