

امتحان 9 – أسئلة قصيرة (بند ج)

1 ج. معطاة الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 4x + a}{4}$ حيث $0 < a < 8$.

المماسان للرسم البياني للدالة $f(x)$ في $x = 0$ و $x = 4$ يشكّان مع المحور x مثلثًا مساحته $\frac{25}{16}$.

(1) جدوا قيمة البارامتر a .

معطاة الدالة $g(x) = |f(x)|$.

(2) جدوا إحداثيات النقاط القصوى للدالة $g(x)$.

ج. (1)

نجد قيمة البارامتر a

نشتق الدالة لإيجاد ميل المماس في كل نقطة:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + a}{4} = \frac{x^2}{4} - x + \frac{a}{4}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{4} - 1 = \frac{x}{2} - 1$$

نجد الميل في $x = 0$:

$$f'(0) = -1$$

نجد إحداثي y :

$$f(0) = \frac{a}{4}$$

نجد معادلة المماس في $x = 0$:

$$y = mx + b$$

$$\frac{a}{4} = (-1) \cdot 0 + b$$

$$b = \frac{a}{4}$$

⇓



$$y = -x + \frac{a}{4}$$

نجد الميل في $x = 4$:

$$f'(4) = \frac{4}{2} - 1 = 1$$

نجد إحداثي y :

$$f(4) = \frac{16 - 16 + a}{4} = \frac{a}{4}$$

نجد معادلة المماس في $x = 4$:

$$y = mx + b$$

$$\frac{a}{4} = 1 \cdot 4 + b$$

$$b = \frac{a}{4} - 4$$

$$y = x + \frac{a}{4} - 4$$

نجد التقاطع بين المستقيمين:

$$-x + \frac{a}{4} = x - 4 + \frac{a}{4}$$

$$-x = x - 4$$

⇓

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

نجد إحداثي y بواسطة التعويض في المستقيم الأول:

$$y = -2 + \frac{a}{4} = \frac{a - 8}{4}$$

إذا نقطة التقاء المماسين هي:

$$P(2, \frac{a - 8}{4})$$



نجد نقطة تقاطع المماس الأول مع المحور x :

$$0 = -x + \frac{a}{4} \Rightarrow x = \frac{a}{4}$$

نجد نقطة تقاطع المماس الثاني مع المحور x :

$$0 = x - 4 + \frac{a}{4} \Rightarrow x = 4 - \frac{a}{4}$$

بسبب المعطى $0 < a < 8$ ، تقع نقطة التقاطع الأولى على يسار الثانية

لذلك طول قاعدة المثلث (نرمز له بـ k) على المحور x هو الفرق بين إحداثيي x :

$$k = \left(4 - \frac{a}{4}\right) - \frac{a}{4} = 4 - \frac{a}{2} = \frac{8 - a}{2}$$

ارتفاع المثلث هو الفرق بين إحداثيي y لنقطة التقاء المماسين والمحور x :

$$h = \left| \frac{a - 8}{4} \right| = \frac{8 - a}{4}$$

$$0 < a < 8$$

معطى أن مساحة المثلث الناتج تساوي $\frac{25}{16}$

$$S = \frac{k \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 - a}{2} \cdot \frac{8 - a}{4}$$

$$S = \frac{(8 - a)^2}{16} = \frac{25}{16} \quad / \cdot 16$$

$$(8 - a)^2 = 25$$

$$8 - a = \pm 5$$

بما أن $0 < a < 8$ ، فإن $8 - a$ موجب

$\Downarrow$

$$8 - a = 5$$

$\Downarrow$

$$a = 3$$



ج. (2)

نجد إحداثيات النقاط القصوى للدالة $g(x)$

معطى أن: $g(x) = |f(x)|$

نعوض a في $f(x)$:

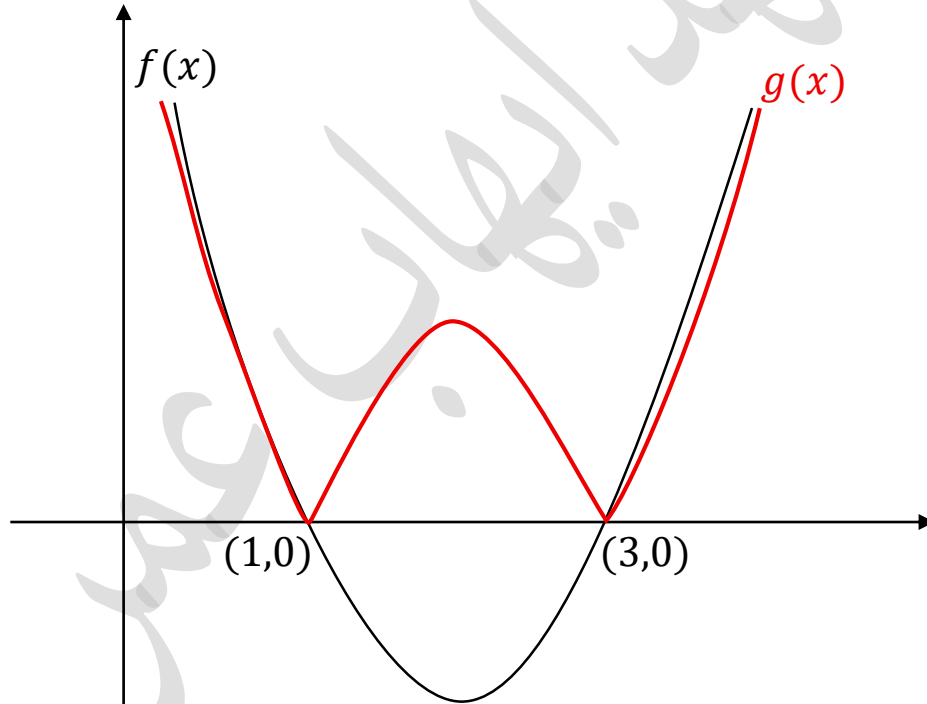
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{4}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{4}$$

تتقاطع الدالة مع المحور x في:

$$(1,0) \quad (3,0)$$

وفي القيمة المطلقة التقاطع مع المحور x يصبح نقاط قصوى حادة، نتخيل الشكل:



نلاحظ أيضًا أن النقطة القصوى في الدالة $f(x)$ تبقى قصوى في الدالة $g(x)$ إلا أن y يتغير، نجد إحداثيات النقطة القصوى في الدالة $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{3}$$

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$



$$x = 2$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 3}{4} = \frac{4 - 8 + 3}{4} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\left(2, -\frac{1}{4}\right)$$

إذاً في الدالة $g(x)$:

$$\left(2, \frac{1}{4}\right), (1, 0), (3, 0)$$

