بحث دالّة شتاء 2019

سؤال 6 :

معطى أنّ : الدالّة $g''(x) = -\frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4}$ هي دالّة المشتقّة الثانية للدالّة $g(x)$.

الدوالّ $g(x)$ ، $g'(x)$ ، $g''(x)$ معرّفة في نفس المجال .

معطى أنّ معادلة المماسّ للدالّة $g(x)$ في نقطة التوائها هي $y = \frac{3}{2}x - 3$.

أ. (1) جد الدالّة $g(x)$.

(2) ما هو مجال تعريف الدالّة $g(x)$ ؟

(3) جد مجالات تصاعد ومجالات تنازل الدالّة $g(x)$.

(4) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $g(x)$.

نُعرّف : $h(x) = |g(x)|$.

ب. في نفس هيئة المحاور التي رسمتَ فيها الرسم البيانيّ التقريبيّ للدالّة $g(x)$ ، أضِف بخطّ متقطّع رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $h(x)$.

جـ. معطى أنّ : $\int_a^2 g(x)\,dx = t$ ، $0 < a < 2$ ، t هو بارامتر.

عبّر بدلالة t عن $\int_a^2 (h(x) - g(x))\,dx$.

أ)

(1)

نجد احداثي x لنُقطة الالتواء للدالّة $g(x)$:

$$g''(x) = 0$$

$$-\frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4} = 0$$

$$\Downarrow \; \cdot (x-4)^4 \cdot x^4$$

$$-18(x-4)^4 + 18x^4 = 0$$

$$\Downarrow \; \div(-18)$$

$$(x-4)^4 - x^4 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x-4)^4 = x^4$$

$$x - 4 = -x \qquad\qquad x - 4 = x$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{x = 2} \qquad\qquad \emptyset$$

<u>الان نجد المُشتقَّة الأولى :</u>

$$g'(x) = \int g''(x)\,dx = \int -\frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4}\,dx = \int -18x^{-4} + 18(x-4)^{-4}\,dx$$

$$= \frac{-18x^{-3}}{-3\cdot 1} + \frac{18(x-4)^{-3}}{-3\cdot 1} + c_1 = 6x^{-3} - 6(x-4)^{-3} + c_1 = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{(x-4)^3} + c_1$$

[قيمة المُشتقة في نُقطة الانتواء , أي في $x = 2$, تُساوي $\left(\frac{3}{2}\right)$ كما هو مُعطى]

$$\Downarrow$$

$$g'(2) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{6}{2^3}-\frac{6}{(2-4)^3}+c_1=\frac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{2}+c_1=\frac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1=0$$

يَنتُج أنَّ ,

$$\boxed{g'(x)=\frac{6}{x^3}-\frac{6}{(x-4)^3}}$$

الان نجد $g(x)$:

$$g(x)=\int g'(x)=\int \frac{6}{x^3}-\frac{6}{(x-4)^3}\,dx=\int 6x^{-3}-6(x-4)^{-3}\,dx$$

$$=6\frac{x^{-2}}{-2\cdot 1}-\frac{6(x-4)^{-2}}{-2\cdot 1}+c_2=3(x-4)^{-2}-3x^{-2}+c_2=$$

$$=\frac{3}{(x-4)^2}-\frac{3}{x^2}+c_2$$

معطى : أنَّ مُعادلة المماس للدالَّة $g(x)$ في نقطة التوائها $y=\frac{3}{2}x-3$.

اكتشفنا سابقا أنَّ احداثي x لنُقطة الالتواء يساوي 2 .

نجد احداثي y لنُقطة الالتواء :

$$y=\frac{3}{2}x-3 \;\longrightarrow\; y=\frac{3}{2}\cdot 2-3 \;\longrightarrow\; y=0$$

$$(\ 2\ ,\ 0\ )$$

نُعَوّض نُقطة الالتواء في الدَّالة $g(x)$:

$$g(2) = \frac{3}{(2-4)^2} - \frac{3}{2^2} + c_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{(2-4)^2} - \frac{3}{2^2} + c_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 = 0$$

ينتُج من ذلك أنَّ :

$$\boxed{g(x) = \frac{3}{(x-4)^2} - \frac{3}{x^2}}$$

(2)

$$x^2 \neq 0 \quad\quad (x-4)^2 \neq 0$$

$$\Downarrow \quad\quad \Downarrow$$

$$\boxed{x \neq 0} \quad\quad \boxed{x \neq 4}$$

(3)

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{6}{x^3} - \frac{6}{(x-4)^3} = 0$$

$$\cdot\, x^3(x-4)^3 \Downarrow$$

$$6 \cdot (x-4)^3 - 6 \cdot x^3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$6 \cdot (x-4)^3 = 6 \cdot x^3$$

$$\div 6 \Downarrow$$

$$(x-4)^3 = x^3$$

$$\Downarrow$$

$$x - 4 = x$$

$$\Downarrow$$

$$\emptyset$$

لا يوجد في الدَّالة نُقاط قصوى

x	-1	0	1	4	6
$g'(x)$	$-$		$+$		$-$
$g(x)$	↘		↗		↘

$$\begin{cases} g'(-1) = \dfrac{6}{(-1)^3} - \dfrac{6}{(-1-4)^3} = -\dfrac{744}{125} \quad \longrightarrow \quad (-) \\ g'(1) = \dfrac{6}{(1)^3} - \dfrac{6}{(1-4)^3} = \dfrac{56}{9} \quad \longrightarrow \quad (+) \\ g'(6) = \dfrac{6}{(6)^3} - \dfrac{6}{(6-4)^3} = -\dfrac{13}{18} \quad \longrightarrow \quad (-) \end{cases}$$

الدَّالَّة تنازُليَّة في $x < 0$

الدَّالة تصاعُديَّة في $0 < x < 4$

الدَّالَّة تنازُليَّة في $x > 4$

(4)

$$\lim_{x\to\infty} g(x) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3}{(x-4)^2} - \frac{3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{(x-4)^2} - \frac{3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{3}{(x-4)^2} - \frac{3}{x^2} = \infty$$

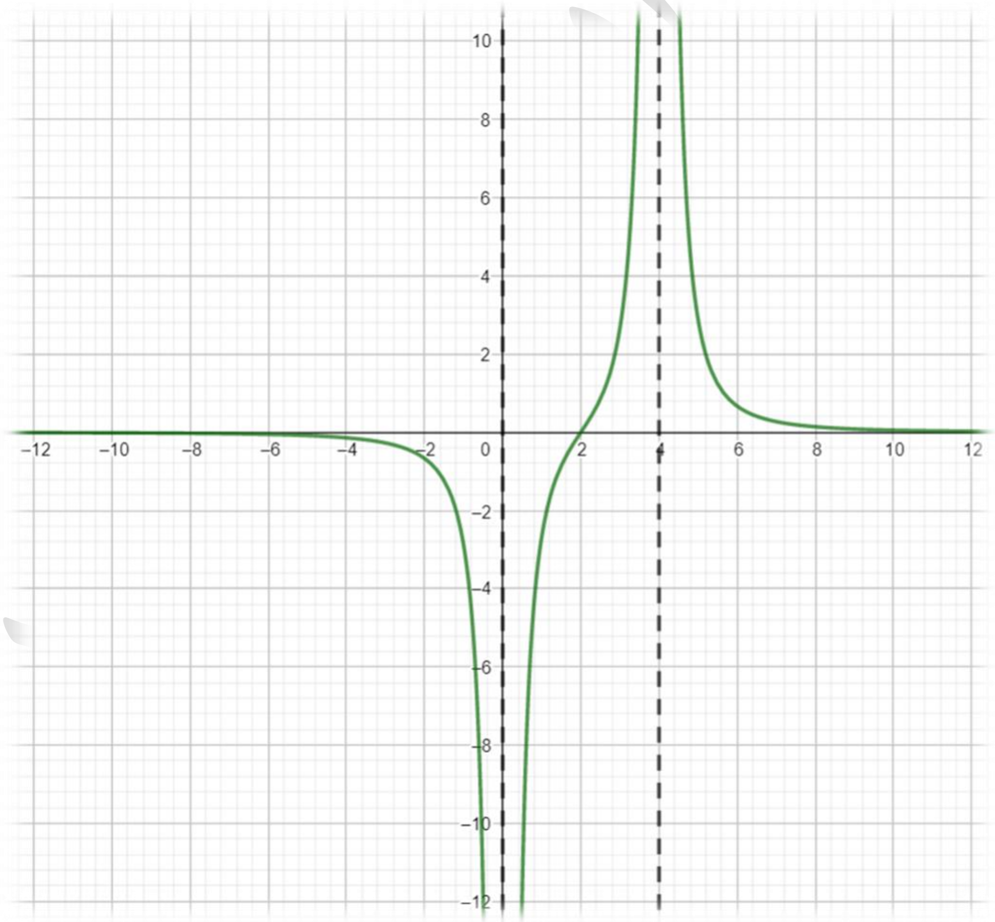
$$\lim_{x\to 4} g(x) \longrightarrow \lim_{x\to 4} \frac{3}{(x-4)^2} - \frac{3}{x^2} = \infty$$

<u>خُطوط تقارب في :</u>

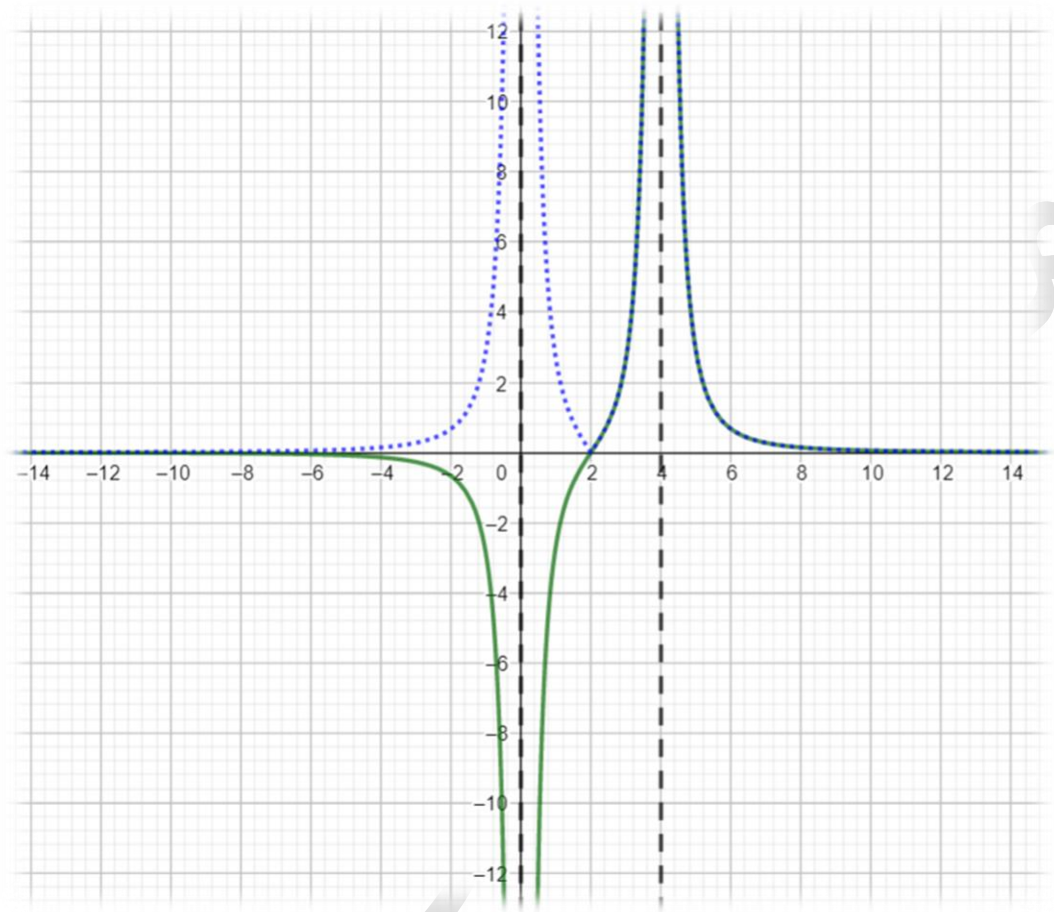
$$y = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 4$$



ب)



ج)

$$\int_a^2 \left(h(x) - g(x)\right) dx = \int_a^2 h(x) - \int_a^2 g(x) = \int_a^2 |g(x)| - \int_a^2 g(x) = \int_a^2 |g(x)| - t$$

بما أنَّ الدَّالَّة $g(x)$ سالبة في المجال $0 < x < 2$, فهذا يعني أنَّ قيمة t سالبة . الأمر الذي سيقودنا الى التَفكير أنَّ $\int_a^2 |g(x)|$ ستكون موجبة , وكون الدَّالة $|g(x)|$ هي انعكاس للدَّالة $g(x)$ في المجال $0 < x < 2$ نسبة للمحور x . فهذا يعني أنَّ $\int_a^2 |g(x)| = -t$

ينتُج أنَّ ,

$$\int_{a}^{2}\left(h(x)-g(x)\right)dx=-t-t=-2t$$

إيهاب عمر

إيهاب عمر