سؤال 8 :

معطاة الدالة $f(x) = \frac{-a \cdot 16 \cos x}{\sqrt{16 \sin x + 9}}$ في المجال $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}$.

a هو بارامتر أكبر من 0 . الدالة معرَّفة لكلّ x في المجال المعطى .

أ. جد في المجال المعطى بالنسبة لأيّة قيَم x :

(١) $f(x) > 0$. علّل.

(٢) $f(x) < 0$. علّل.

ب. جد قيمة التكامل $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\,dx$.

جـ. معطى أنّ المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = -\frac{\pi}{6}$ وَ $x = \frac{7\pi}{6}$ ، تساوي 8 .

جد قيمة a .

أ)

(1)

$$f(x) > 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{-a \cdot 16\cos(x)}{\sqrt{16\sin(x)+9}} > 0$$

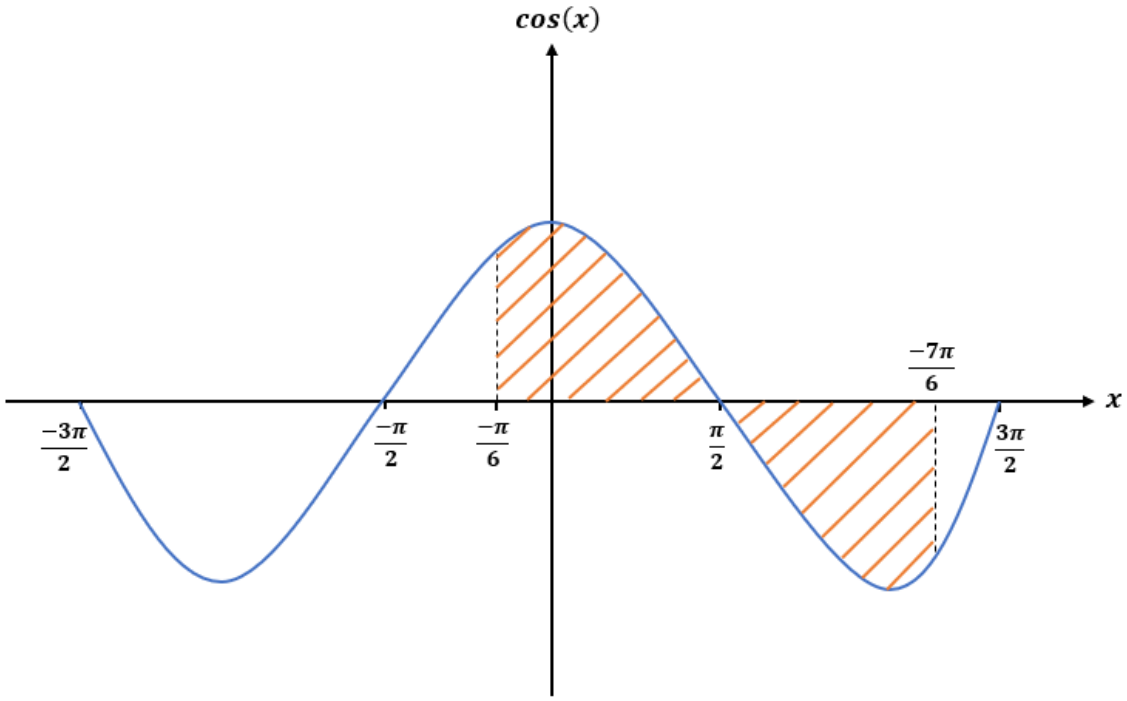
$$\cdot \sqrt{16\sin(x)+9} \Downarrow$$

$$-a \cdot 16\cos(x) > 0$$

$$\div (-16a) \Downarrow$$

$$\cos(x) < 0$$

انتبه قلبنا الاشارة



$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{6}$$

(2)

$$f(x) < 0$$

$$\downarrow$$

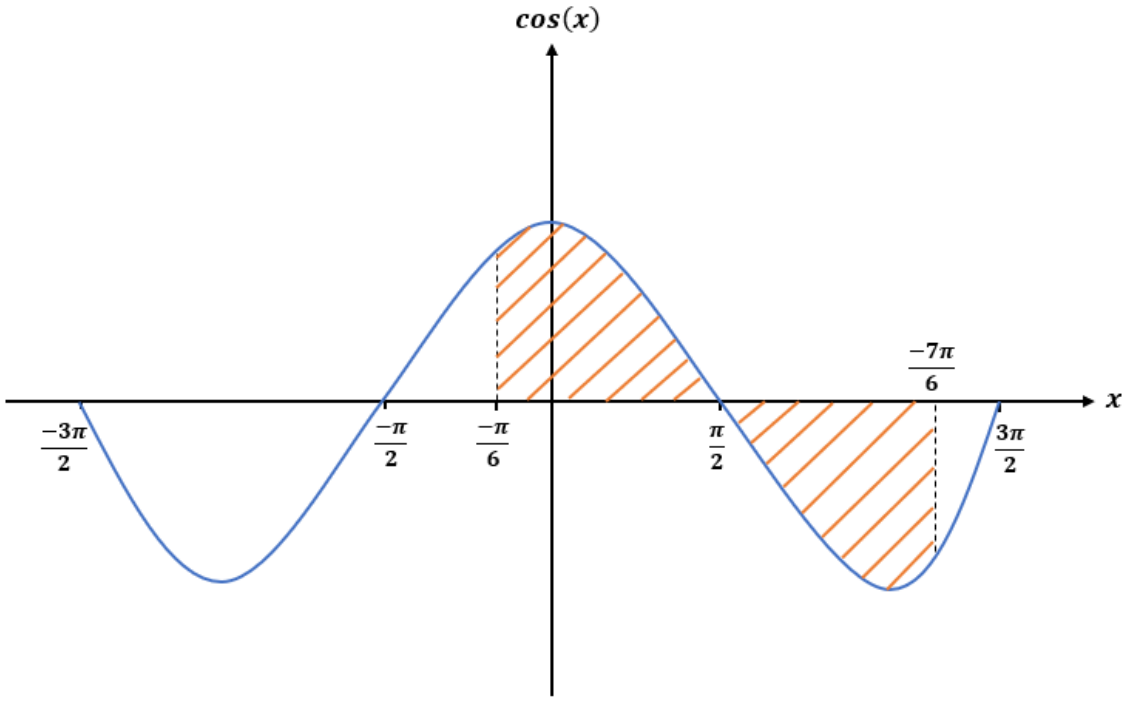
$$\frac{-a \cdot 16\cos(x)}{\sqrt{16\sin(x)+9}} < 0$$

$$\cdot \sqrt{16\sin(x)+9} \Downarrow$$

$$-a \cdot 16\cos(x) < 0$$

$$\div (-16a) \Downarrow$$

$$\cos(x) > 0$$



$$\Downarrow$$

$$\frac{-\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{2}$$

ب)

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{-a \cdot 16\cos(x)}{\sqrt{16\sin(x)+9}}\,dx = -a \cdot \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} 2 \cdot \frac{16\cos(x)}{2\sqrt{16\sin(x)+9}}\,dx$$

$$= -2a \cdot \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{16\cos(x)}{2\sqrt{16\sin(x)+9}}\,dx = -2a \cdot \left[\sqrt{16\sin(x)+9}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}$$

$$= -2a \cdot \left(\sqrt{16\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)+9} - \sqrt{16\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+9}\right) = -2a \cdot (1-1) = 2a \cdot 0 = 0$$

إيهاب عمر

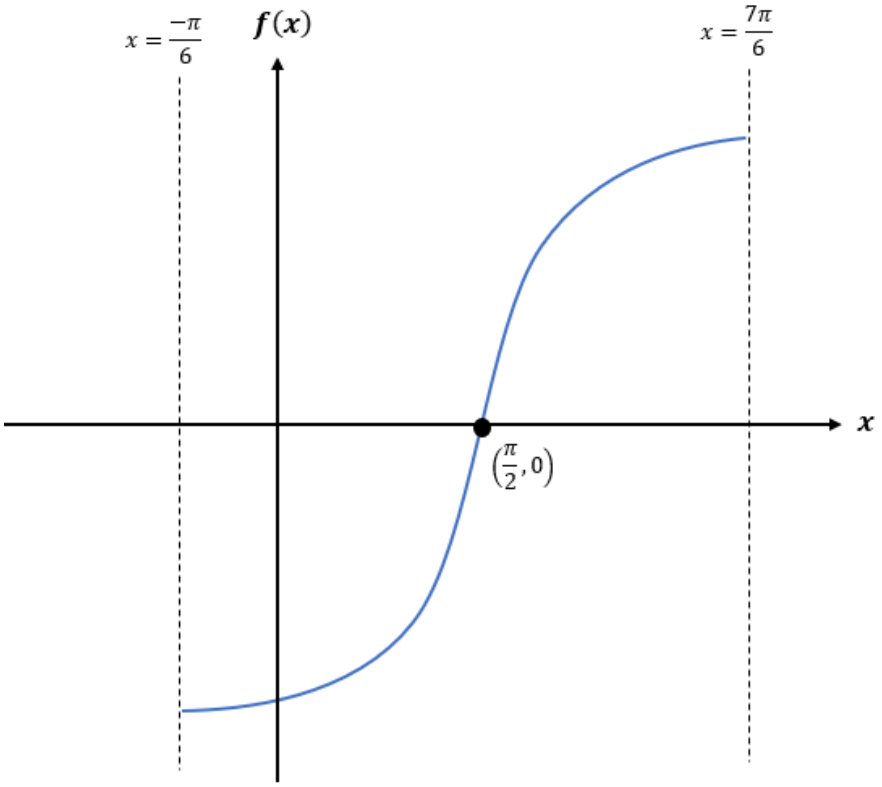
ج)

كما وجدنا في الفرع (أ) :

$f(x)$ أكبر من صفر في المجال $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{6}$

$f(x)$ أصغر من صفر في المجال $\frac{-\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2}$

أي أنَّ رسم الدَّالَّة $f(x)$ سيكون من هذا النوع :



$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 0 - f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\,dx = 8$$

$$\Downarrow$$

$$2a \cdot \left[\sqrt{16\sin(x) + 9}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - 2a \cdot \left[\sqrt{16\sin(x) + 9}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} = 8$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$2a\cdot\left(\left(\sqrt{16\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+9}\right)-\left(\sqrt{16\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+9}\right)\right)-2a\cdot\left(\left(\sqrt{16\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)+9}\right)-\left(\sqrt{16\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+9}\right)\right)=8$$

$$\Downarrow$$

$$2a\cdot(5-1)-2a\cdot(1-5)=8$$

$$\Downarrow$$

$$2a\cdot 4-2a\cdot(-4)=8$$

$$\Downarrow$$

$$8a+8a=8$$

$$\Downarrow$$

$$16a=8$$

$$\div 16\ \Downarrow$$

$$\boxed{a=\frac{1}{2}}$$

معهد إيهاب عمر