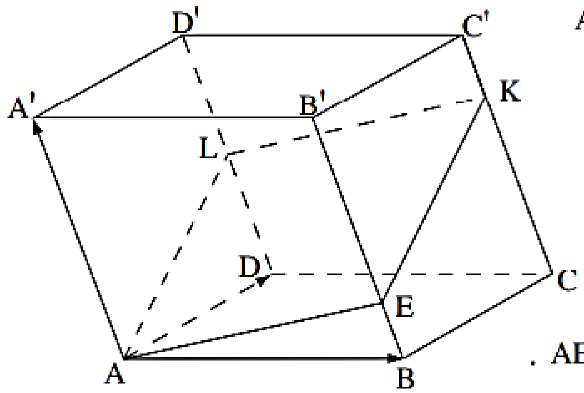
متّجهات - شتاء 2011

سُؤال 2 :



معطى متوازي السطوح $ABCDA'B'C'D'$

(جسم جميع أوجهه متوازية أضلاع).

النقطة L هي منتصف الضلع DD' .

النقطة E موجودة على الضلع BB'

بحيث $\frac{B'E}{EB} = 3$.

معطى أنّ الضلع AA' يعامد المستوى AEL .

المستوى يقطع الضلع CC' في النقطة K

(انظر الرسم).

نرمز: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{CK} = m\vec{CC'}$

أ. جد قيمة m .

ب. معطى أنّ التمثيل البارامتري للمستقيم CC' هو $\underline{x} = (4,5,8) + t(1,-1,2)$ ،

النقطة $(2,-1,3)$ موجودة على المستوى AEL ، وإحداثيات الرأس C' هي $(x,y,0)$.

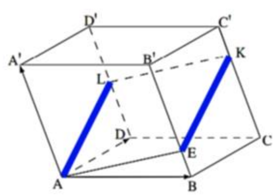
جد بُعد الرأس C عن المستوى AEL .

أ)

المستوى $AEKL$ يتقاطع مع المُستويان المُتوازيان $ADD'A'$ و $BCC'B'$ في AL و EK بالتلائم

$\Downarrow$

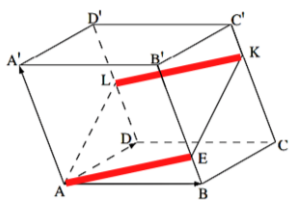
$\boxed{EK \parallel AL}$



المستوى $AEKL$ يتقاطع مع المُستويان المُتوازيان $DCC'D'$ و $ABB'A'$ في LK و AE بالتلائم

$\Downarrow$

$\boxed{AE \parallel LK}$



$$\Downarrow$$

AEKL مُتوازي أضلاع

شكل رُباعي فيه زوجين من الأضلاع المُتوازية هُو مُتوازي أضلاع

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AL}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{EK} = \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$

$$\frac{EB'}{BE} = 3 \quad \text{(مُعطى)}$$

$$\Downarrow \quad EB' = BB' - BE$$

$$\frac{BB' - BE}{BE} = 3$$

$$\Downarrow \quad \cdot BE$$

$$BB' - BE = 3BE$$

$$\Downarrow$$

$$BB' = 4BE$$

$$\Downarrow \quad \div 4$$

$$\frac{1}{4}BB' = BE$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} \quad \Downarrow$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AA'}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{CB} = -\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EK}$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{CK} = (-\underline{v}) + \left(\frac{1}{4}\underline{w}\right) + \left(\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{CK} = -\underline{v} + \frac{1}{4}\underline{w} + \underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\underline{w}$$

مُعطى أنَّ :

$$\overrightarrow{CK} = m\,\overrightarrow{CC'} \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{CK} = m\,\underline{w}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m = \frac{3}{4}}$$

جواب نهائي

ب)

التمثيل البارامتري للمُستقيم CC' هُو $\underline{x} = (4, 5, 8) + t(1, -1, 2)$

$$\Downarrow$$

$$C'(4 + t_0, 5 - t_0, \underline{8 + 2t_0})$$

مُعطى : احداثيّات الرأس C' هي $(x, y, 0)$

$$8 + 2t_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2t_0 = -8$$

$$\div 2 \Downarrow$$

$$\boxed{t_0 = -4}$$

$$\Downarrow$$

$$C'\,(\,4-4\,,5-(-4)\,,8+2\cdot(-4)\,)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C'\,(\,0\,,9\,,0\,)}$$

مُعطى أنَّ المُستقيم AA' يُعامد المُستوى AEL , نستنتج من ذلك أنَّ المُستقيم CC' أيضا يُعامد المُستوى AEL . وذلك لأنَّ $AA' \parallel CC'$

المُستقيم CC' يُعامد المُستوى AEL , ولهذا يُمكن اعتبار مُتَّجه الاتجاه للمُستقيم CC' هُوَ نَفْسُهُ فِكتور النورمال للمُستوى AEL

$$\Downarrow$$

$$\underline{h}=(\,1\,,-1\,,2\,)$$

$$\Downarrow$$

$$AEL\;:\;\; x-y+2z+d=0$$

النُقطة $(\,2\,,-1\,,3\,)$ موجودة على المُستوى AEL (مُعطى)

$$\Downarrow$$

$$2-(-1)+2\cdot 3+d=0$$

$$\Downarrow$$

$$2+1+6+d=0$$

$$\Downarrow$$

$$9+d=0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d=-9}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{AEL\ :\ x - y + 2z - 9 = 0}$$

كما وضَّحنا سابقا , المُستقيم CC' يُعامد المُستوى AEL . ولهذا فانَّ بُعد كُل نُقطة على المُستقيم CC' عن المُستوى AEL يُساوى بُعدنا عن النُقطة K (نُقطة تقاطُع المُستقيم CC' والمُستوى AEL)

نجد بُعد النُقطة $C'\,(0\,,9\,,0)$ عن المُستوى $AEL\ :\ x - y + 2z - 9 = 0$

بُعد النُقطة (x_0, y_0, z_0) عن المُستوى $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$C'K = \frac{|\,0 - 9 + 2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$C'K = \frac{|-18|}{\sqrt{6}}$$

$$\Downarrow$$

$$C'K = \frac{18}{\sqrt{6}}$$

وجدنا سابقا أنَّ : $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{CC'}$

$$\Downarrow$$

$$\left|\overrightarrow{CK}\right| = \frac{3}{4}\left|\overrightarrow{CC'}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$CK = \frac{3}{4}(CK + C'K)$$

$$C'K = \frac{18}{\sqrt{6}} \Downarrow$$

$$CK = \frac{3}{4}\left(CK + \frac{18}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$CK = \frac{3}{4}CK + \frac{54}{4\sqrt{6}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{4}CK = \frac{54}{4\sqrt{6}}$$

$$\cdot 4 \Downarrow$$

$$\boxed{CK = 9\sqrt{6}}$$

جواب نهائي