امتحان 7 – بحث دالّة بولينوم

1) معطاة الدّالّة: $f(x) = \frac{32}{3}x^3 - 2a^2x + a^2$. $(a > 0)$.

أ. عبّروا بدلالة a عن نقطة تقاطع الدّالّة مع المحور y .

ب. (1) عبّروا بدلالة a عن النّقاط القصوى للدّالّة وحدّدوا نوعها.

(2) في أيّ ربع تقع نقطة النّهاية الكبرى؟ علّلوا.

ج. ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة إذا علمتم أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ يوجد حلّ واحد فقط.

د. معطاة المعادلة: $\frac{32}{3}x^3 - 2x = 0.5$. كم حل يوجد للمعادلّة؟ علّلوا.

معطاة الدّالّة $g(x)$ والتي تحقّق: $g(x) = f(x) - a^2$.

هـ. جدوا عدد نقاط تقاطع الدّالّة $g(x)$ مع المحور x .

أ. نعبر بدلالة a عن نقطة تقاطع الدّالّة مع المحور y

نعوّض $x = 0$ في الدّالّة:

$$f(0) = \frac{32}{3} \cdot 0^3 - 2a^2 \cdot 0 + a^2 = a^2$$

$$(0, a^2)$$

ب. (1) نعبّر بدلالة a عن النقاط القصوى للدّالّة ونحدّد نوعها

نشتق الدّالّة $f(x)$:

$$f'(x) = 32x^2 - 2a^2$$

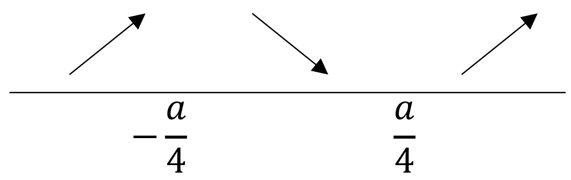
$$f'(x) = 0$$

$$32x^2 - 2a^2 = 0$$

$$32x^2 = 2a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{16}$$

$$x = \pm\frac{a}{4}$$



$$\Downarrow$$

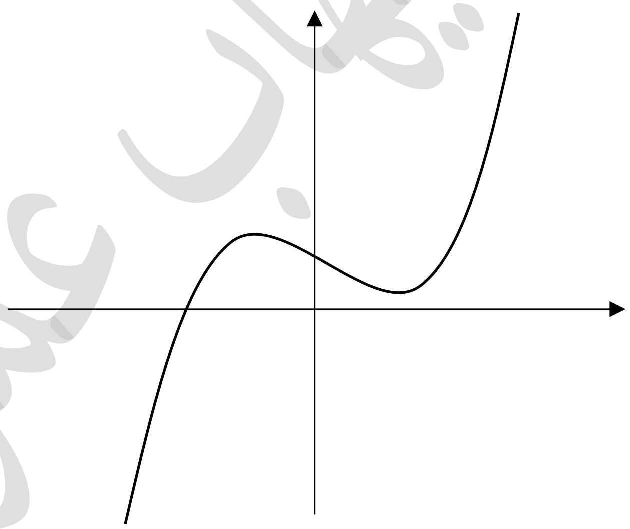
$$\max\left(-\frac{a}{4}, \frac{a^3}{3} + a^2\right) \text{ ، } \min\left(\frac{a}{4}, a^2 - \frac{a^3}{3}\right)$$

(2) نجد في أيّ ربع تقع نقطة النهاية العظمى للدّالّة

نقطة النهاية العظمى للدّالّة: $\max\left(-\frac{a}{4}, \frac{a^3}{3}+a^2\right)$
بما أنّ: $a > 0$ ، إذًا إحداثي x للنقطة يقع في الجهة السالبة من المحور x
وإحداثي y للنقطة القصوى موجب لهذا نستنتج أنّ
نقطة النهاية العظمى للدّالّة تقع في الربع الثاني

ج. نرسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة $f(x)$

معطى أنّ: للمعادلة $f(x) = 0$ يوجد حلّ واحد فقط، هذا يعني أنّ الدّالّة تقطع محور x في نقطة واحدة فقط.



د. نجد عدد حلول المعادلة: $\frac{32}{3}x^3 - 2x = 0.5$

نلاحظ أنّ الطرف $\frac{32}{3}x^3 - 2x$ من المعادلة المعطاة ممكن أنّ يساوي الحدين الأولين من الدّالّة $f(x) = \frac{32}{3}x^3 - 2a^2x$

فقط في حال كان $a = 1$ ، ينتج أنّ الدّالّة تصبح:

$$f(x) = \frac{32}{3}x^3 - 2x + 1$$

ولكي يصبح طرف المعادلة مطابق للدّالّة $f(x)$ يجب أنّ نضيف على الطرفين 1

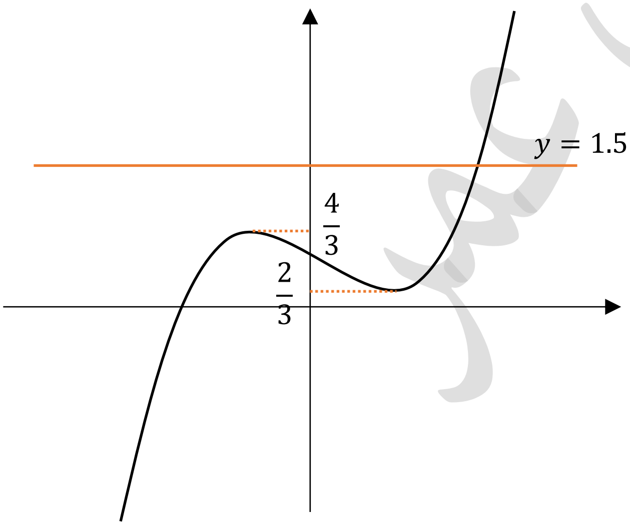
$$\frac{32}{3}x^3 - 2x + 1 = 0.5 + 1$$

$$f(x) = 1.5$$

ممكن أنّ نجد عدد حلول المعادلة $f(x)$ ، نفحص عدد نقاط تقاطع المستقيم $y = 1.5$ مع الدّالّة $f(x)$

إحداثي y للنقاط القصوى في حال كان $a = 1$ هي:

$\max\left(-\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right)$ ، $\min\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$



نلاحظ من الرسم أنّ المستقيم $y = 1.5$

يقطع الدّالّة في نقطة واحدة فقط

$\Downarrow$

عدد حلول المعادلة هو 1

ه.   نجد عدد نقاط تقاطع الدّالّة $g(x)$ مع المحور x

ممكن حل هذا البند بطريقتين:

الطريقة الاولى:

ممكن حل البند عن طريق الازاحات

معطاة الدّالّة: $g(x) = f(x) - a^2$

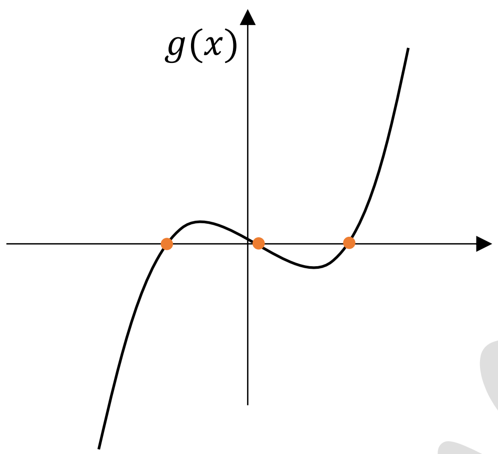
نلاحظ أنّ الدّالّة $g(x)$ هي عبارة عن إزاحة عمودية للأسفل a^2

بهذا تصبح النقاط القصوى للدّالّة:

$$\max\left(-\frac{a}{4}, \frac{a^3}{3}\right) \text{ ، } \min\left(\frac{a}{4}, -\frac{a^3}{3}\right)$$

نلاحظ أنّ نقطة النهاية الصغرى تصبح تحت المحور x ونقطة النهاية العظمى تبقى فوق المحور x

نرسم رسمًا تقريبيًا للدّالّة $g(x)$



من الرسم نلاحظ أنّ:

عدد نقاط تقاطع الدّالّة مع المحور x هو 3

الطريقة الثانية:

معطاة الدّالّة: $g(x) = f(x) - a^2$

$$g(x) = \frac{32}{3}x^3 - 2a^2x + a^2 - a^2$$

$$g(x) = \frac{32}{3}x^3 - 2a^2x$$

$$g(x) = 0$$

$$\frac{32}{3}x^3 - 2a^2x = 0$$

$$x\left(\frac{32}{3}x^2-2a^2\right)=0$$

$$x=0 \qquad\qquad \frac{32}{3}x^2-2a^2=0$$

$$\frac{32}{3}x^2=2a^2$$

$$32x^2=6a^2$$

$$x^2=\frac{3a^2}{16}$$

$$x=\pm\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Downarrow$$

عدد نقاط تقاطع الدّالّة مع المحور x هو 3