استقراء – صيف 2012

2. معطاة متوالية معرَّفة حسب الدستور التراجعي :
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

ومعطاة متوالية معرَّفة حسب الدستور التراجعي :
$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = b_n + 3 \end{cases}$$

أ . برهن بالاستقراء أو بأيّة طريقة أخرى أنّه يتحقّق لكلّ n طبيعي :
$$\frac{1}{a_1 \cdot b_1} + \frac{1}{a_2 \cdot b_2} + \frac{1}{a_3 \cdot b_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot b_n} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

ب . بيّن أنّ المجموع :
$$\frac{1}{a_{n+1} \cdot b_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2} \cdot b_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+3} \cdot b_{n+3}} + \dots + \frac{1}{a_{2n} \cdot b_{2n}}$$
يساوي $\frac{n}{a_{n+1} \cdot a_{2n+1}}$.

أ.

نبرهن المطلوب

معطى: $a_1 = 2$
$$a_{n+1} = a_n + 3$$
$$b_1 = 5$$
$$b_{n+1} = b_n + 3$$

من المعطى نستنتج أنّ الدالّتيْن حسابيّتان، حيث إن الفرق بين كل حد وحد هو ثابت:
$$a_{n+1} = a_n + 3$$
$$a_{n+1} - a_n = 3$$

$$b_{n+1} = b_n + 3$$
$$b_{n+1} - b_n = 3$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 2 + (n-1)3$$
$$a_n = 3n - 1$$

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$b_n = 5 + (n-1)3$$

$$b_n = 3n + 2$$

$$\frac{1}{a_1 \cdot b_1} + \frac{1}{a_2 \cdot b_2} + \frac{1}{a_3 \cdot b_3} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

مرحلة الفحص: $n = 1$

$$\frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2(3+2)}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

مرحلة الافتراض:

رأينا سابقًا أن الادعاء صحيح لـ$n = 1$

نفترض أنّ الادعاء صحيح لـ$n = k$

$$\frac{1}{a_1 \cdot b_1} + \frac{1}{a_2 \cdot b_2} + \frac{1}{a_3 \cdot b_3} + \cdots + \frac{1}{(3k-1)\cdot(3k+2)} = \frac{k}{2(3k+2)}$$

مرحلة البرهان:

نبرهن أنّ الادعاء صحيح لـ$n = k+1$

$$\underbrace{\frac{1}{a_1 \cdot b_1} + \frac{1}{a_2 \cdot b_2} + \cdots + \frac{1}{(3k-1)\cdot(3k+2)}}_{\frac{k}{2(3k+2)}} + \frac{1}{(3(k+1)-1)\cdot(3(k+1)+2)} = \frac{k+1}{2(3(k+1)+2)}$$

$$\frac{k}{2(3k+2)} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} = \frac{k+1}{2(3n+2)}$$

$$k(3k+5) + 2 = (k+1)(3k+5)$$

$$3k^2 + 5k + 2 = 3k^2 + 5k + 2$$

جملة الانهاء:

من الفحص رأينا أنّ الادعاء صحيح لـ$n = 1$. ومن الفرضية أنّ الادعاء صحيح لـ$n = k$، برهنا أنّ الادعاء صحيح أيضًا لـ$n = k + 1$. لذا، فإن الادعاء صحيح لكل n طبيعي.

ب. نبيّن المطلوب

$$\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}\cdot b_{n+2}}+\frac{1}{a_{n+3}\cdot b_{n+3}}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}=\frac{n}{a_{n+1}\cdot a_{2n+1}}$$

معطى أنّ $a_n = 3n - 1$

من البند السابق برهنّا أنّه يتحقق لكل n طبيعي:

$$\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+\cdots+\frac{1}{a_n\cdot b_n}=\frac{n}{2(3n+2)}$$

نعوض $2n$:

$$\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+\cdots+\frac{1}{a_n\cdot b_n}+\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}=\frac{2n}{2(3(2n)+2)}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}\cdot b_{2n}}=\frac{2n}{2(3(2n)+2)}-\left(\frac{1}{a_1\cdot b_1}+\frac{1}{a_2\cdot b_2}+\frac{1}{a_3\cdot b_3}+\cdots+\frac{1}{a_n\cdot b_n}\right)$$

$$\frac{2n}{2(3(2n)+2)}-\left(\frac{n}{2(3n+2)}\right)=\frac{n}{(3(n+1)-1)\cdot(3(2n+1)-1)}$$

$$\frac{n}{2(3n+1)}-\left(\frac{n}{6n+4}\right)=\frac{n}{(3n+2)\cdot(6n+2)}$$

$$\frac{n}{2(3n+1)}-\left(\frac{n}{2(3n+2)}\right)=\frac{n}{2(3n+2)\cdot(3n+1)}$$

$$\frac{3n^2+2n-3n^2-n}{2(3n+2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{2(3n+2)\cdot(3n+1)}$$

$$\frac{n}{2(3n+2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{2(3n+2)\cdot(3n+1)}$$

$\boxdot$