إيهاب عمر

قيم قصوى صيف 2013

سؤال 7:

معطاة الدالّة $g(x) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$ في المجال $0 \le x \le \frac{7}{3}\pi$.

أ. جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع المحورين.

ب. جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x) = \sin x$.

جـ. النقطة A تتواجد على الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$، والنقطة B تتواجد على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ بحيث تكون القطعة AB موازية للمحور y .

(1) جد أكبر طول ممكن للقطعة AB .

(2) كم قطعة مثل AB ، التي طولها أكبر ما يمكن، تنتج في المجال المعطى؟ علّل.

أ)

تقاطُع الدَّالَّة مع المحور y :

$$g(0) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 0\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \left(0\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

تقاطُع مع المحور x :

$$g(x) = 0 \longrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 0 \longrightarrow \frac{2\pi}{3} - x = \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - \pi k$$

$k = 0$ $k = -1$

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right) \qquad \left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$$

ب)

$$f(x) = g(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$\Downarrow$$

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad x = \pi - \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + 2\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pi - \frac{2\pi}{3} + x + 2\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$\emptyset$$

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - x + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Downarrow$$

$$2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + \pi k}$$

$$\text{(مُعطى)} \quad 0 \le x \le \frac{7}{3}\pi$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{4\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{7\pi}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{7\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ج)

(1)

وجدنا في الفرع السابق نُقاط تقاطُع الدوال , الأمر الذي سيُسهّل علينا عمليَّة تحديد طول القطعة AB .

لاحظ عزيزي الطالب أنَّ نُقطة تقاطُع تعني أنَّ الدَّالَّة الأكبر من ناحية القيمة تُصبح الأصغر , ولهذا نفحص قيم الدَّوال $f(x)$ و $g(x)$ بين كُل تقاطُعين :-

$$\frac{4\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{3}$$

$$\downarrow$$

$$f(2\pi) = \sin(2\pi) = 0$$

$$g(2\pi) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) < g(x)$$

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$$

$$\downarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) > g(x)$$

$$0 \le x < \frac{\pi}{3}$$

$$\downarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) > f(x)$$

$$AB = g(x) - f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) - \sin(x)$$

$$AB = f(x) - g(x) = \sin(x) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

إيهاب عمر

نُعرّف $h(x)$ في المجال $\frac{4\pi}{3} \le x \le \frac{7\pi}{3}$, $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

$$h(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) - \sin(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} - x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} - x + x}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\downarrow$$

$$h'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

استعملنا القانون :

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

نُساوي $h'(x)$ لصفر لنجد النُقاط القُصوى :

$$h'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Downarrow$$

$$-x = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{6} - \pi k$$

$k = 0$, $k = -1$, $k = -2$, $k = -3$

$$\ldots \quad x = -\frac{\pi}{6} \; , \; x = \frac{5\pi}{6} \; , \; x = \frac{11\pi}{6} \; , \; x = \frac{17\pi}{6} \quad \ldots$$

✗ ✗ ✓ ✗

$$\Downarrow$$

x		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{3}$	
$h'(x)$			$-$				$+$	0	$-$		
$h(x)$		max	$\searrow$	min		min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	

$$\left\{\begin{array}{l} h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \longrightarrow \quad (-) \\ h'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \longrightarrow \quad (+) \\ h'(2\pi)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\pi\right)=-\frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad (-) \end{array}\right\}$$

كما هو واضح من الجدول أعلاه , يوجد نُقطتا max في الرسم البياني للدَّالَّة $h(x)$ في المجال $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{3}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$. ولهذا نجد أي منهما الأكبر :-

$$h(0)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-0\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)=1$$

ينتُج أنَّ أكبر قيمة للقطعة AB في المجال $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{3}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ هي 1 .

الان نفحص باقي المجالات ...

نُعرّف $h(x)$ في المجال $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$

$$h(x) = \sin(x) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x - \frac{2\pi}{3} + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x - \frac{2\pi}{3} - x}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\downarrow$$

$$h'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

<u>نُساوي $h'(x)$ لصفر لنجد النُقاط القُصوى :</u>

$$h'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{x = \frac{5\pi}{6} + \pi k}$$

$k = -1$, $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$

$$\ldots\ x = \frac{-\pi}{6}\ ,\ x = \frac{5\pi}{6}\ ,\ x = \frac{11\pi}{6}\ ,\ x = \frac{17\pi}{6}\ \ldots$$

✓ ✓ ✗ ✗

$\Downarrow$

x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$	
$h'(x)$			$+$	0	$-$		
$h(x)$		min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	

$$\left\{\begin{array}{l} h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow (+) \\ h'(\pi) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \longrightarrow (-) \end{array}\right\}$$

نجد القيمة القُصوى للدَّالَّة $h(x)$ في هذا المجال :

$$h\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ينتُج أنَّ أكبر قيمة للقطعة AB في المجال $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$ هي 1 .

ينتُج أنَّ أكبر طول ممكن للقطعة AB في المجال $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{3}$ هو 1

(2)

كما اكتشفنا في الفرع السابق للقطعة AB أكبر طول ممكن في :

$$x = \frac{5\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6}$$

أي أنَّه يوجد قطعتان مثل AB في المجال المُعطى .