متواليات 806 صيف أ 2024

2. المتوالية A هي متوالية هندسيّة حدودها هي ... a_1, a_2, a_3 وأساسها هو q ، $-1 < q < 0$.
معطى أنّ: $a_1 = 1$.
المتوالية B معرَّفة لكلّ n طبيعيّ على النحو التالي: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.
أ. برهنوا أنّ المتوالية B هي متوالية هندسيّة، وعبِّروا عن أساسها بدلالة q .
ب. أمامكم ثلاثة ادّعاءات I–III . حدِّدوا بالنسبة لكلّ ادّعاء إذا كان صحيحًا أم غير صحيح. علِّلوا تحديداتكم.
I. المتوالية A ليست تصاعديّة وليست تنازليّة.
II. المتوالية B هي متوالية تصاعديّة.
III. الحدود التي تقع في الأماكن الزوجيّة في المتوالية A تُكوِّن متوالية تصاعديّة.

معطى أنّ: المتوالية B هي متوالية لانهائيّة مجموعها هو $\frac{1}{8}$.
جـ. جدوا قيمة q .

معطاة متوالية هندسيّة أخرى C ، وهي معرَّفة لكلّ n طبيعيّ على النحو التالي: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.
معطى أنّ: $c_3 + c_4 + \ldots + c_m = 44{,}307$ ، m هو عدد طبيعيّ.
د. جدوا قيمة m .

أ) $\{$ نبرهن أنّ المتوالية B هندسية $\}$

معطى: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$
وأن المتوالية a_n هندسية

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} \cdot a_{n+3}$$

$$q_B \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} \cdot a_{n+3}}{a_n \cdot a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = q \cdot q = q^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$$

$$\Downarrow$$

المتوالية B هندسية وأساسها ثابت ويساوي q^2

ب) { نحدد اذا كانت الجمل صحيحة }

I. صحيح، لأن أساس المتوالية سالب، أي إشارة حدودها تتغير

II. خطأ، لأن أساس الدالة B هو كسر أي انها دالة متقاربة تنازلية

III. صحيح، لأنه في متوالية الأماكن الزوجية الحد الأول سالب، وأساس المتوالية موجب q^2. لذلك هي متوالية تصاعدية بالضرورة.

ج) { نجد q }

معطى أنّ: B متوالية لا نهائية ومجموعها $\frac{1}{8}$

$$b_1 = a_1 \cdot a_{1+2} = 1 \cdot 1 \cdot q^{3-1} = q^2$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{b_1}{1-(q^2)} = \frac{1}{8}$$

مجموع لا نهائي لمتوالية هندسية:

$S_{\text{نهائي}}$

$$\frac{q^2}{1-q^2} = \frac{1}{8}$$

$$8q^2 = 1 - q^2$$

$$9q^2 = 1$$

$$q^2 = \frac{1}{9}$$

$$q = \pm\frac{1}{3}$$

معطى: $-1 < q < 0$

$$\Downarrow$$

$$q = -\frac{1}{3}$$

د) $\{$ نجد m $\}$

معطى أنّ:

$$c_3 + c_4 + \cdots + c_m = 44{,}307$$

نجد في البداية q_c :

معطى أنّ: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

$$\Downarrow$$

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

$$q_c = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{\frac{a_n}{b_n}}$$

$$= \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{b_n}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_n}{b_{n+1}} = q \cdot \frac{1}{q^2}$$

$$q_c = \frac{1}{q} = -3$$

$$\Downarrow$$

$$q_c = -3$$

نجد قانون الحد العام للمتوالية c_n

$$c_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

$$c_n = 9 \cdot (-3)^{n-1}$$

نحسب c_3

$$c_3 = 9 \cdot (-3)^{3-1} = 9 \cdot 9 = 81$$

المعادلة:

$$S_{c_3 \to c_m} = 44307$$

ملاحظة: نعوض مكان الـ n في قانون المجموع عدد الحدود التي نجمعها،

لذلك نطرح 2 من m كوننا بدأنا الجمع من الحد الثالث.

$$S_{c_3 \to c_m} = \frac{c_3 \cdot ((q_c)^{m-2} - 1)}{q_c - 1} = \frac{81 \cdot ((-3)^{m-2} - 1)}{-3 - 1}$$

$$\frac{81 \cdot ((-3)^{m-2} - 1)}{-4} = 44307$$

$$(-3)^{m-2} - 1 = \frac{44307 \cdot (-4)}{81}$$

$$(-3)^{m-2} = -2187$$

$$m-2 = \frac{\ln{(2187)}}{\ln{(3)}}$$

$$m-2 = 7$$

$$m = 9$$