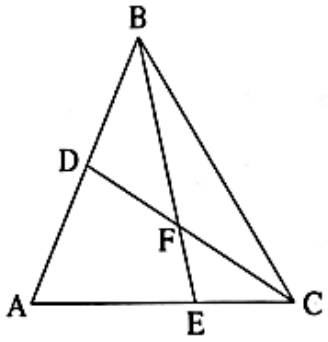
سُؤال 2 :

معطى المثلّث ABC (انظر الرسم).



النقطة D هي منتصف الضلع AB .

النقطة E تقسم الضلع AC بنسبة $AE:EC=2:1$.

النقطة F هي ملتقى القطعتين BE وَ CD .

نرمز: $\overrightarrow{CA}=\underline{u}$ ، $\overrightarrow{CB}=\underline{v}$

k وَ t هما عددان بحيث: $\overrightarrow{BF}=t\cdot\overrightarrow{BE}$ ، $\overrightarrow{CF}=k\cdot\overrightarrow{CD}$.

أ. جد t وَ k .

المثلّث ABC يقع في المستوى $4x+2y+z-12=0$.

هذا المستوى يقطع المحور x في النقطة A ، ويقطع المحور y في النقطة C ،

ويقطع المحور z في النقطة B . النقطة O هي نقطة أصل المحاور.

ب. جد إحداثيّات النقطتين E وَ F .

جـ. جد معادلة المستوى AOE .

د. جد حجم الهرم FAOE .

أ)

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=-\underline{u}+\underline{v}$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD} \quad\longrightarrow\quad \overrightarrow{CD}=\underline{u}+\frac{1}{2}\cdot(-\underline{u}+\underline{v})=\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$$

($\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$)

$$\overrightarrow{CF}=k\cdot\overrightarrow{CD}=k\cdot\left(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}\right)=\boxed{\frac{k}{2}\underline{u}+\frac{k}{2}\underline{v}}\ *$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = -\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}$$

$$\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BE} = t \cdot \left(-\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u}\right) = -t\underline{v} + \frac{t}{3}\underline{u}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = \underline{v} - t\underline{v} + \frac{t}{3}\underline{u} = \boxed{(1-t)\underline{v} + \frac{t}{3}\underline{u}} \quad **$$

$$* = **$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{k}{2}\underline{v} + \frac{k}{2}\underline{u} = (1-t)\underline{v} + \frac{t}{3}\underline{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{k}{2} = 1 - t \\ \frac{k}{2} = \frac{t}{3} \end{array}} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \quad k = 2 - 2t \\ \longrightarrow \quad k = \frac{2t}{3} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$2 - 2t = \frac{2t}{3} \longrightarrow 6 - 6t = 2t \longrightarrow 8t = 6 \longrightarrow t = \frac{6}{8} \longrightarrow \boxed{t = \frac{3}{4}}$$

$$k = 2 - 2t \longrightarrow k = 2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \longrightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

إيهاب عمر

ب)

$$\boxed{4x+2y+z-12=0}$$

A – التقاطُع مع المحور x

$$4x+2\cdot 0+0-12=0 \quad \longrightarrow \quad 4x=12 \quad \longrightarrow \quad x=3 \quad \longrightarrow \quad (3,0,0)\,A$$

C – التقاطُع مع المحور y

$$4\cdot 0+2y+0-12=0 \quad \longrightarrow \quad 2y=12 \quad \longrightarrow \quad y=6 \quad \longrightarrow \quad (0,6,0)\,C$$

B – التقاطُع مع المحور z

$$4\cdot 0+2\cdot 0+z-12=0 \quad \longrightarrow \quad z-12 \quad \longrightarrow \quad (0,0,12)\,B$$

نستعمل القانون (أنظُر الى נוסחאון) :-

احداثيات نُقطة تقسم قطعة أطرافها (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2) بنسبة $\frac{k}{l}$: $\left(\frac{lx_1+kx_2}{k+l},\frac{ly_1+ky_2}{k+l},\frac{lz_1+kz_2}{k+l}\right)$

$$\frac{AE}{EC}=\frac{2}{1}$$

$$\Downarrow$$

$$E\left(\frac{2\cdot 0+1\cdot 3}{2+1},\frac{2\cdot 6+1\cdot 0}{2+1},\frac{2\cdot 0+1\cdot 0}{2+1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E\,(1,4,0)}$$

$$\frac{BF}{FE}=\frac{3}{1}$$

$$\Downarrow$$

$$F\left(\frac{3\cdot 1+1\cdot 0}{3+1},\frac{3\cdot 4+1\cdot 0}{3+1},\frac{3\cdot 0+1\cdot 12}{3+1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F\left(\frac{3}{4},3,3\right)}$$

ج)

فكتورَيْ الاتجاه للمُستوى AOE

$$\overrightarrow{OA}=(3,0,0)$$
$$\overrightarrow{OE}=(1,4,0)$$

نجد فكتور النورمال للمُستوى AOE :

نرمُز فكتور النورمال : (a,b,c)

$$(a,b,c)\cdot(3,0,0)=0 \longrightarrow 3\cdot a+0\cdot b+0\cdot c=0 \longrightarrow 3\cdot a=0 \longrightarrow a=0$$

$$(a,b,c)\cdot(1,4,0)=0 \longrightarrow 1\cdot a+4\cdot b+0\cdot c=0 \longrightarrow a+4b=0 \longrightarrow 4b=0 \longrightarrow b=0$$

فكتور النورمال : $(0,0,1)$

$$\Downarrow$$

مُعادلة المُستوى AOE : $0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z+d=0$

المُستوى AOE يمُر من نُقطة أصل المحاور $\Downarrow$

$$0+d=0$$

$$\Downarrow$$

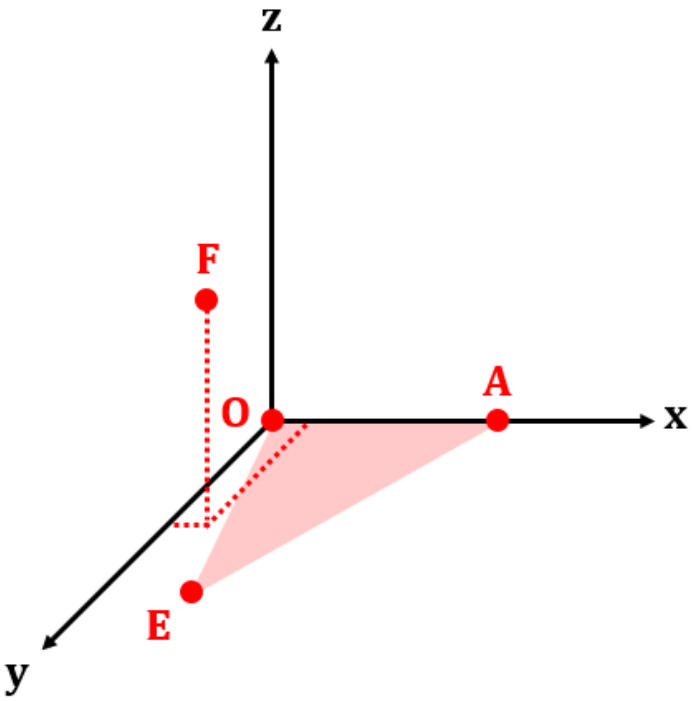
$$d=0$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

مُعادلة المُستوى AOE : $z = 0$

د)



$$(\text{حجم الهرم}) = (\text{مساحة القاعدة}) \cdot (\text{الارتفاع}) \cdot \frac{1}{3}$$

$$S_{FAOE} = \frac{S_{AOE} \cdot z_F}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{FAOE} = \frac{AO \cdot y_E \cdot \frac{1}{2} \cdot z_F}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{FAOE} = \frac{x_A \cdot y_E \cdot \frac{1}{2} \cdot z_F}{3}$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$S_{FAOE} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_{FAOE} = 6}$$

معهد إيهاب عمر