أسئلة قصيرة – صيف 2020

أ. برهن بواسطة الاستقراء الرّياضيّ أو أيّ طريقة أخرى أنّ التّعبير $5^n - 1$ يقسم على 4 بدون باقٍ، لكلّ n طبيعيّ.

مرحلة الفحص:

نفحص الادعاء لـ $n = 1$:

$$5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

يقسم على 4

$$\Downarrow$$

الادعاء صحيح عندما $n = 1$

مرحلة الافتراض:

نفرض ان الادعاء صحيح لـ $n = k$ أي:

$5^k - 1$ يقسم على 4 دون باق لكل k طبيعي

مرحلة البرهان:

نبرهن ان الادعاء صحيح لـ $n = k + 1$ أي نبرهن ان:

$5^{k+1} - 1$ يقسم على 4 بدون باقي لكل k طبيعي.

البرهان:

$$5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 1 = \underbrace{4 \cdot 5^k}_{\text{4 تقسم على 4 .}} + \underbrace{5^k - 1}_{\text{يقسم على 4 حسب فرضية الاستقراء}}$$

حاصل جمع مقدارين يقسمان على 4 هو بالضرورة يقسم على 4.

جملة انهاء:

من الفحص رأينا ان الادعاء صحيح لـ $n = 1$ ومن الفرضية ان الادعاء صحيح لـ $n = k$ برهنا ان الادعاء صحيح أيضا لـ $n = k + 1$ لذا فان الادعاء صحيح لكل n طبيعي.

ب. حدّد ما إذا كان الادّعاء التّالي صحيحًا: مثلثان متشابهان ومساحاتهما متساويتان – يتطابقان. علّل.

(نفرض) $\Delta ABC \sim \Delta EDF$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DF} = \frac{AC}{EF}$$

$\frac{S_{ABC}}{S_{EDF}} = \left(\frac{AB}{ED}\right)^2$ (نسبة التشابه تربيع تساوي نسبة المساحة)

$$S_{ABC} = S_{EDF}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{AB}{ED}\right)^2 = 1$$

$$\frac{AB}{ED} = 1$$

$$AB = ED$$

$$\Downarrow$$

$$BC = DF \, , AC = EF$$

$$\Downarrow$$

$\Delta ABC \cong \Delta EDF$ حسب نظرية (ض, ض, ض)

معهد إيهاب عمر

ج. حدّد ما إذا كان الادّعاء التّالي صحيحًا: للدّالّة $f(x)=\frac{x\cdot(x-3)}{(x-3)^2}$ لا يوجد خطّ تقارب عموديّ، ولكن يوجد خطّ تقارب أفقيّ واحد. علّل.

نجد مجال تعريف الدالة

$$(x-3)^2=0$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x\cdot(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{x}{x-3}=\frac{3}{0}=\infty$$

أي يوجد خط تقارب عمودي لدالة $f(x)$

أي الادعاء غير صحيح

د. حدّد ما إذا كان الادّعاء التّالي صحيحًا: إذا ازحنا رسم الدالة $\sin x$ إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{2}$، نحصل على رسم الدالة $\cos x$. علّل.

إذا ازحنا رسم الدالة $\sin x$ الى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$ تصبح

نعلم أيضا من المتطابقات ان:

$$\sin(90 \mp \alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

لذلك الادعاء صحيح إذا ازحنا رسم الدالة $\sin x$ إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{2}$، نحصل على رسم الدالة $\cos x$.