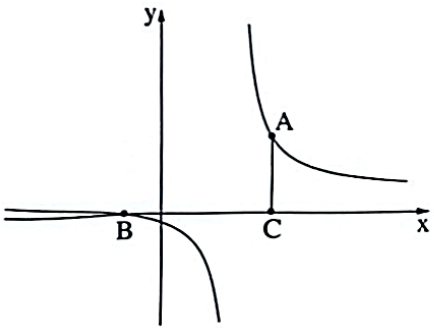
قيم قصوى – شتاء 2025

8. الرسم الذي أمامكم يصف الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)=\frac{x+3}{x-6}$.



النقطة A تقع على الرسم البيانيّ للدالّة f(x) في الرُّبْع الأوّل.

النقطة C تقع على المحور x بحيث القطعة AC توازي المحور y .

النقطة B هي نقطة تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة f(x) مع المحور x .

أ. (1) جدوا مجال تعريف الدالّة f(x) .

(2) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالّة f(x) .

ب. جدوا إحداثيّات النقطة B .

جـ. (1) جدوا إحداثيّات النقطة A التي بالنسبة لها تكون مساحة المثلّث ABC أصغر ما يمكن.

(2) جدوا أصغر مساحة ممكنة للمثلّث ABC .

أ.(1) { نجد مجال تعريف الدالة $f(x)$ }

$$f(x)=\frac{x+3}{x-6}$$

$$x-6\neq 0$$

$$x\neq 6$$

أ.(2) { نجد خطوط التقارب المعامدة للمحورين }

حسب مجال التعريف من البند السابق:

$$x=6$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\infty+3}{\infty-6}=1 \quad\longrightarrow\quad y=1$$

ب) { نجد إحداثيات النقطة B }

نقاطع المستقيم مع محور y :

$$0=\frac{x+3}{x-6}$$

$$x=-3 \Longrightarrow (-3,0)$$

ج) (1) { نجد إحداثيات A التي بالنسبة لها S_{ABC} أصغر ما يمكن }

نرمز $x_A = t$

$$\Downarrow$$

$$A\left(t, \frac{t+3}{t-6}\right)$$

AC معامد لمحور x $\Longleftarrow$ $AC = y_A = \frac{t+3}{t-6}$

$$BC = x_C - x_B = t - (-3) = t + 3$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{\left(\frac{t+3}{t-6}\right)(t+3)}{2} = \frac{(t+3)^2}{2(t-6)}$$

نبني معادلة للمساحة $S(t)$:

$$S(t) = \frac{(t+3)^2}{2(t-6)}$$

$$S'(t) = \frac{2(t+3)(t-6) - (t+3)^2 \cdot 1}{2}$$

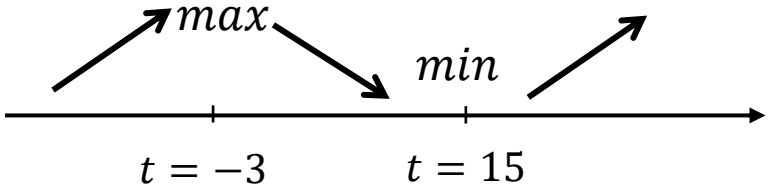
$$= \frac{(t+3)\big(2(t-6) - (t+3)\big)}{2} = \frac{(t+3)(2t-12-t-3)}{2}$$

$$S'(t) = \frac{(t+3)(t-15)}{2}$$

$$S'(t) = 0$$

$$\frac{(t+3)(t-15)}{2} = 0$$

$$t = -3\,,\, t = 15$$



$\Downarrow$

$A(15,2)$

ج) (2) { نجد أصغر مساحة ممكنة لـ S_{ABC} }

وجدنا بالبند السابق: $t=15$

$$S(15)=\frac{(t+3)^2}{2(t-6)}=18$$

معهد إيهاب عمر