اعداد مركبة – صيف 2024 موعد ب 807

3. أ. (1) جدوا حلول المعادلة: $z^6 + 729i = 0$ (z هو عدد مركّب).

(2) جدوا أربعة حلول المعادلة: $\frac{z^6 + 729i}{z^2 - 9i} = 0$ (z هو عدد مركّب).

الحلول التي وجدتموها في البند الفرعيّ "أ (2)" تمثّل رؤوس شكل رباعيّ في مستوى چاوس.

ب. جدوا مساحة الشكل الرباعيّ.

يُديرون الشكل الرباعيّ (حول نقطة أصل المحاور) بزاوية α بعكس اتّجاه عقارب الساعة، $0^o < \alpha < 90^o$.

جـ. ما هي قيمة حاصل ضرب جميع الأعداد التي تُمثّل رؤوس الشكل الرباعيّ بالنسبة لِـ $\alpha = 45^o$ ؟ علّلوا إجابتكم.

د. (1) جدوا قيمتَي α اللتين بالنسبة لهما يكون حاصل ضرب جميع الأعداد التي تُمثّل رؤوس الشكل الرباعيّ بعد الدوران عددًا خياليًّا (وهميًّا) نقيًّا.

(2) ما هي قيمة حاصل الضرب بالنسبة لكلّ واحدة من قيمتَيْ α اللّتَيْن وجدتموهما؟

(أ)1. { جدوا حلول المعادلة }

$$z^6 + 729i = 0$$
$$z^6 = -729i$$
$$z^6 = 729\ cis\ 270$$

نتذكر القانون : $\sqrt[n]{rcis\theta} = \sqrt[n]{r}cis\left(\frac{\theta+360k}{n}\right)$

$$z_k = \sqrt[6]{729}\ cis\ \left(\frac{270+360k}{6}\right)$$

$$z_k = 3\ cis\ (45+60k)$$

↓

$$z_0 = 3\ cis\ 45$$
$$z_1 = 3\ cis\ 105$$
$$z_2 = 3\ cis\ 165$$
$$z_3 = 3\ cis\ 225$$
$$z_4 = 3\ cis\ 285$$
$$z_5 = 3\ cis\ 345$$

(أ)2. { جدوا حلول المعادلة }

$$\frac{z^6 + 729i}{z^2 - 9i} = 0$$

$$\frac{z^6 + 729i}{z^2 - 9i} = 0 \quad /\cdot z^2 - 9i$$

$$z^6 + 729i = 0$$

نلاحظ ان البسط في المعادلة هو نفسه المعادلة الموجودة في البند السابق والتي وجدنا حلولها

↓

حلول هذه المعادلة هي نفس حلول المعادلة السابقة ولكن نستثني الحلول التي تجعل المقام مساوٍ لـ 0

$$z^2 - 9i = 0$$
$$z^2 = 9i = 9cis90$$
$$z_k = \sqrt{9}\ cis\ \left(\frac{90 + 360k}{2}\right)$$

$$z_k = 3cis\ (45 + 180k)$$

$$z_0 = 3cis\ 45$$
$$z_1 = 3cis\ 225$$

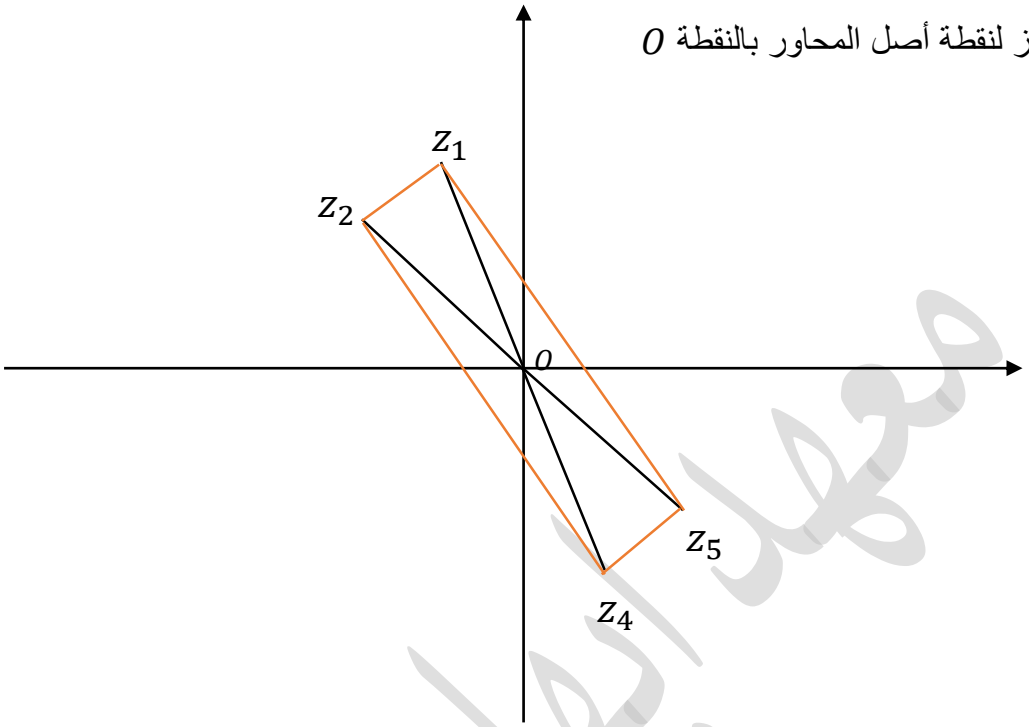
نستثني هذه الحلول من حلول المعادلة في البند الأول لنحصل على الإجابات النهائية لهذه المعادلة

↓

$$z_1 = 3\ cis\ 105$$
$$z_2 = 3\ cis\ 165$$
$$z_4 = 3\ cis\ 285$$
$$z_5 = 3\ cis\ 345$$

(ب) {جدوا مساحة الشكل الرباعي}

← نرمز لنقطة أصل المحاور بالنقطة O



$$S = \frac{z_1 z_4 \cdot z_2 z_5 \cdot \sin(\sphericalangle z_1 o\ z_5)}{2}$$

$$\sphericalangle z_1 o\ z_5 = 360 - \theta_{z_5} + z_1 = 360 - 345 + 105 = 120$$

↓

$$S = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin(120)}{2} = \frac{36\sqrt{3}}{4}$$

(ج) ما هي قيمة حاصل ضرب جميع الاعداد التي تمثل رؤوس الشكل الرباعي بالنسبة لـ $\alpha = 45^\circ$

دوران الشكل الرباعي بزاوية 45° بعكس اتجاه عقارب الساعة ستؤدي الى إضافة 45° لكل الاعداد المركبة التي تمثل رؤوس المستطيل

رؤوس المستطيل الناتجة

↓

$$z_{1"} = 3\ cis\ 150$$
$$z_{2"} = 3\ cis\ 210$$
$$z_{4"} = 3\ cis\ 330$$
$$z_{5"} = 3\ cis\ 30$$

↓

$$z_{1"} \cdot z_{2"} \cdot z_{4"} \cdot z_{5"} = 3\ cis\ 150 \cdot 3\ cis\ 210 \cdot 3\ cis\ 330 \cdot 3\ cis\ 30$$

نتذكر القانون : $r_1 cis\theta_1 \cdot r_2 cis\theta_2 = r_1 \cdot r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$

$$z_{1"} \cdot z_{2"} \cdot z_{4"} \cdot z_{5"} = 3^4 cis(150 + 210 + 330 + 30)$$

↓

$$z_{1"} \cdot z_{2"} \cdot z_{4"} \cdot z_{5"} = 3^4 cis0 = 81$$

(د)1. {جدوا قيمتي α التي تحقق المطلوب}

حتى يكون حاصل الضرب عدد خيالي نقي يجب ان تكون θ مساوية
اما لـ 90° او 270°

↓

$$z_{1*} \cdot z_{2*} \cdot z_{4*} \cdot z_{5*} =$$
$$= 3\,cis\,(105+\alpha) \cdot 3\,cis\,(165+\alpha) \cdot 3\,cis\,(285+\alpha) \cdot 3\,cis\,(345+\alpha)$$
$$= 3^4 cis(180+4\alpha)$$

↓

$$180+4\alpha = 90+360$$

اضفنا 360 لكي نحصل على زاوية موجبة (لأننا نريد اتجاه عكس عقارب الساعة)

أو

$$180+4\alpha = 270$$

↓

$$\alpha = 67.5 \quad \text{او} \quad \alpha = 22.5$$

(د)2. {ما هي قيمة حاصل الضرب لكل واحدة من قيم α التي وجدناها}

توصلنا الى ان :

$$z_{1*} \cdot z_{2*} \cdot z_{4*} \cdot z_{5*} = 3^4 cis(180+4\alpha)$$

عندما $\alpha = 22.5$ ←

$$z_{1*} \cdot z_{2*} \cdot z_{4*} \cdot z_{5*} = 3^4 cis(180+4\cdot 22.5) = 81cis(270)$$

↓

$$z_{1*} \cdot z_{2*} \cdot z_{4*} \cdot z_{5*} = -81i$$

عندما $\alpha = 67.5$ ←

$$z_{1*} \cdot z_{2*} \cdot z_{4*} \cdot z_{5*} = 3^4 cis(180+4\cdot 67.5) = 81cis(90)$$

↓

$$z_{1*} \cdot z_{2*} \cdot z_{4*} \cdot z_{5*} = 81i$$