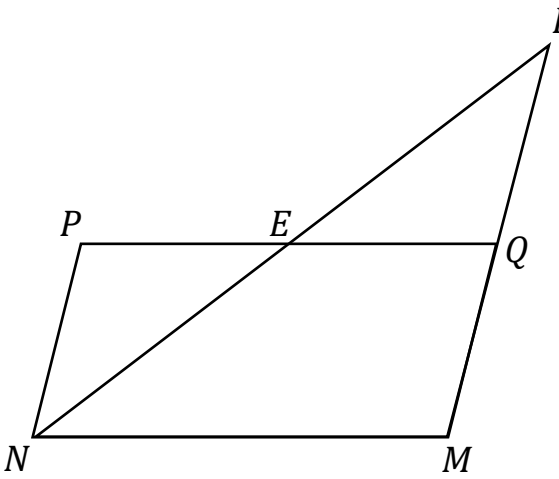
امتحان 3 – هندسة مستوية

3) معطى متوازي الأضلاع $PQMN$.



E هي نقطة على الضّلع PQ بحيث يتحقّق: $\sphericalangle PNE = \sphericalangle ENM$.

امتداد القطعة NE يقطع امتداد الضّلع MQ في النّقطة F.

نرمز للزّاوية $\sphericalangle NFM = \alpha$.

أ. عبّروا عن زوايا شبه المنحرف $EQMN$ بدلالة α.

نرمز: $NM = a$، $NP = b$.

ب. عبّروا عن طول FQ بدلالة a وَ b.

ج. معطى أن $\alpha = 45°$. برهنوا أن متوازي الأضلاع $PQMN$ هو مستطيل.

معطى أن محيط متوازي الأضلاع $PQMN$ يساوي 40 سم، وأنّ $FQ = 4$ سم.

د. جدوا طولي NM وNP.

هـ. جدوا طولي PE و EQ.

و. جدوا طول EF.

معهد إيهاب عمر

مع كورساتنا الاونلاين، تميّز أكثر
جرب مجانًا الآن

أ. نعبّر عن زوايا شبه المنحرف $EQMN$ بدلالة α

معطى أنّ $\measuredangle PNE = \measuredangle ENM$

ومعطى أنّ $\measuredangle NFM = \alpha$

- إيجاد الزاوية $\measuredangle PNE$ والزاوية $\measuredangle PNM$:

$NP \parallel MF$: أضلاع متقابلة في متوازي الاضلاع $PQMN$ وعلى امتدادها

بالتالي: $\measuredangle PNE = \measuredangle NFM = \alpha$ (زوايا متبادلة بين مستقيمين متوازيين)

معطى أنّ NE ينصف الزاوية $\measuredangle PNM$ أي: $\measuredangle PNE = \measuredangle ENM = \alpha$

ينتج أنّ زاوية الرأس الكاملة:

$$\measuredangle PNM = \measuredangle PNE + \measuredangle ENM = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

- الزاوية الأولى لشبه المنحرف:$(\measuredangle EQM)$

في متوازي الأضلاع $PQMN$، كل زاويتين متقابلتين متساويتان

$$\measuredangle EQM = \measuredangle PNM = 2\alpha$$

- الزاوية الثانية لشبه المنحرف:$(\measuredangle NMQ)$

الزاويتان المتجاورتان على نفس الضلع في متوازي الأضلاع مجموعهما $180°$

$$\measuredangle NMQ = 180° - \measuredangle PNM = 180° - 2\alpha$$

- الزاوية الثالثة لشبه المنحرف:$(\measuredangle ENM)$

معطى مباشرة من المنصف $\measuredangle ENM = \alpha$

- الزاوية الرابعة لشبه المنحرف:$(\measuredangle QEN)$

بما أن $NM \parallel PQ$، فإن الزاويتين المتبادلتين متساويتان $\measuredangle PEN = \measuredangle ENM = \alpha$:

الزاويتان $\measuredangle QEN$ و $\measuredangle PEN$ متكاملتان (على خط مستقيم واحد PQ):

$$\measuredangle QEN = 180° - \measuredangle PEN = 180° - \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ENM = \alpha$$

$$\measuredangle EQM = 2\alpha$$

مع كورساتنا الاونلاين، تميّز أكثر
جرب مجانًا الآن

$$\measuredangle NMQ = 180° - 2\alpha$$

$$\measuredangle QEN = 180° - \alpha$$

ب. نعبّر عن طول FQ بدلالة a وَ b

- إثبات أن المثلث ΔNMF متساوي الساقين:
  - في المثلث ΔNMF:
    - معطى $\measuredangle NFM = \alpha$
    - $\measuredangle FNM = \measuredangle ENM = \alpha$
  - بما أن زوايا القاعدة متساوية $(\measuredangle NFM = \measuredangle FNM = \alpha)$،
    فإنّ المثلث ΔNMF متساوي الساقين
  - ينتج أنّ: $FM = NM = a$
- حساب الطول FQ:
  - الضلع FM يتكون من مجموع القطعتين: $FM = FQ + QM$
- نعلم أنّ $QM = NP = b$ أضلاع متقابلة متساوية في متوازي الأضلاع $PQMN$
  - نعوّض الأطوال: $a = FQ + b$
  - بنقل الحدود نجد أن: $FQ = a - b$

ج. نبرهن أن متوازي الأضلاع $PQMN$ هو مستطيل

معطى: $\alpha = 45°$

ومن النتائج السابقة:

$$\measuredangle PNE = \measuredangle ENM = 45°$$

إذًا ينتج أنّ:

$$\measuredangle PNM = 45° + 45° = 90°$$

ومتوازي الأضلاع الذي يحتوي على زاوية قائمة هو مستطيل، لذلك متوازي الأضلاع المعطى مستطيل

مع كورساتنا الاونلاين، تميّز أكثر
جرب مجانًا الآن

د. نجد طولي NM و NP

معطى أنّ محيط متوازي الأضلاع $PQMN$ يساوي 40 سم، وأن $FQ = 4$ سم

من معطى المحيط:

$$2(NM + NP) = 40$$

$$NM + NP = 20$$

ومن نتيجة البند السابق الذي عبّر عن طول القطعة المطلوبة:

$$FQ = NM - NP$$

ومع المعطى:

$$FQ = 4$$

نحصل على:

$$NM - NP = 4$$

نجمع المعادلتين:

$$(NM + NP) + (NM - NP) = 20 + 4$$

$$2NM = 24$$

$$NM = 12$$

وبالتعويض:

$$NP = 20 - 12 = 8$$

إذن الطولان، بالسنتيمتر، هما:

$$NM = 12\,, NP = 8$$

ه. نجد طولي PE و EQ

من البنود السابقة ثبت أن المثلث ΔPNE متساوي الساقين، لذلك:

$$PE = PN$$

$$PE = 8$$

وفي متوازي الأضلاع:

$$PQ = NM = 12$$

وبما أنّ:

$$PQ = PE + EQ$$

إذًا:

$$EQ = 12 - 8 = 4$$

وعليه، بالسنتيمتر:

مع كورساتنا الاونلاين، تميّز أكثر
جرب مجانًا الآن

$$PE = 8\,,\ \ EQ = 4$$

و. نجد طول $\overrightarrow{EF}$

من البند ج أصبح متوازي الأضلاع مستطيلاً، لذلك ضلعاه المتجاوران متعامدان. وبما أن القطعتين المطلوبتين تقعان على امتدادي هذين الضلعين، فإن:

$$EQ \perp QF$$

إذن المثلث EQF قائم الزاوية، نستعين بنظرية فيثاغورس:

$$EF^2 = EQ^2 + FQ^2$$

$$EF^2 = 4^2 + 4^2$$

$$EF^2 = 32$$

$$EF = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

إذن طول القطعة المطلوبة بالسنتيمتر هو:

$$EF = 4\sqrt{2}$$

معهد إيهاب عمر

مع كورساتنا الاونلاين، تميّز أكثر
جرب مجانًا الآن