سؤال قيم قصوى – صيف 2024 موعد أ

8. معطاة الدالّة $f(x)=\frac{48}{x^2}+1$.

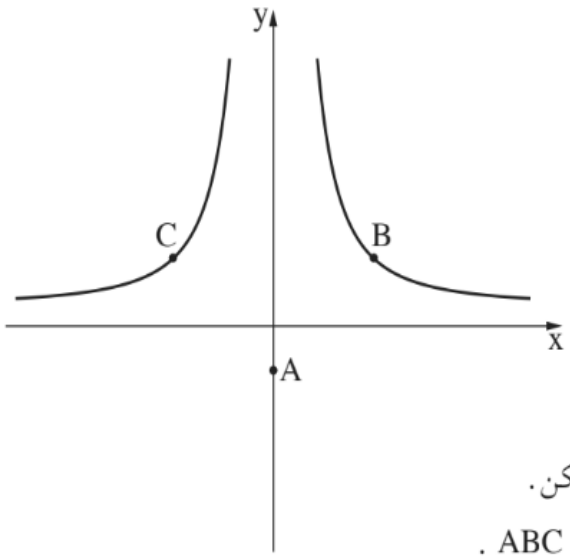
معطاة النقطة A ، التي إحداثيّاتها هي $(0,-2)$.

النقطتان B وَ C تقعان على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ ،

كما هو موصوف في الرسم.

المستقيم BC يوازي المحور x .

نرمز بِـ t إلى الإحداثيّ x للنقطة B ، $t>0$.



أ. عبِّروا بدلالة t عن إحداثيّات النقطتين B وَ C .

ب. جدوا قيمة t التي بالنسبة لها مساحة المثلّث ABC هي أصغر ما يمكن.

جـ. بالنسبة لقيمة t التي وجدتموها في البند "ب" ، جدوا محيط المثلّث ABC .

طريقة حل مسائل قيم قصوى

1. نفرض متغيرات – مع تحديد مجال التعريف المنطقي

(عادة نفرض المطلوب)

2. نحدد الدالة بالكلمات ثم نعبر عنها بالمتغيرات

(كلمة أكبر / أصغر ما يمكن تشير الى الدالة)

3. نحول الدالة الى متغير واحد

(بوساطة معطى إضافي)

4. نشتق الدالة ونجد النقاط القصوى

(يجب فحص نوع النقطة القصوى)

(أ) {عبروا بدلالة t عن النقاط C و B}

معطاة الدالة: $f(x)=\frac{48}{x^2}+1$

معطى ان النقطتان C و B تقعان على الرسم البياني للدالة $f(x)$ وان المستقيم BC يوازي المحور x

↓

$$y_B=y_C$$

نرمز ب t الى الاحداثي x للنقطة B ، $t>0$.

↓

نعوض $x=t$ في $f(x)$

$$f(t)=\frac{48}{t^2}+1$$

↓

$$B\left(t\,,\frac{48}{t^2}+1\right)$$

بما ان:

$$y_B=y_C$$

نعوض $y_C=\frac{48}{t^2}+1$ لإيجاد x_c:

$$\frac{48}{x^2}+1=\frac{48}{t^2}+1$$

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{t^2}$$

$$x^2=t^2$$

$$x=\pm t$$

$$c(-t\,,\frac{48}{t^2}+1)$$

(ب) جدوا قيمة t التي تحقق اصغر مستحة ممكنة للمثلث ΔABC

نحدد الدالة المطلوبة بالكلمات:

$$g(t)=\Delta ABC \text{ المثلث مساحة}$$

لحساب مساحة المثلث نحتاج الى طول الارتفاع على القاعدة BC والى طول الضلع BC (بعد النقطة A عن الضلع BC)

$$BC=x_B-x_c=t+t=2t$$

$$h=|y_A|+y_B=2+\frac{48}{t^2}+1=3+\frac{48}{t^2}$$

$$\downarrow$$

$$g(t)=\frac{BC\cdot h}{2}$$

$$\downarrow$$

$$g(t)=\frac{2t\cdot(3+\frac{48}{t^2})}{2}=t\left(3+\frac{48}{t^2}\right)=3t+\frac{48}{t}$$

← نشتق الدالة ونجد النقطة القصوى:

$$g'(t)=3-\frac{48}{t^2}$$

$$g'(t)=0$$

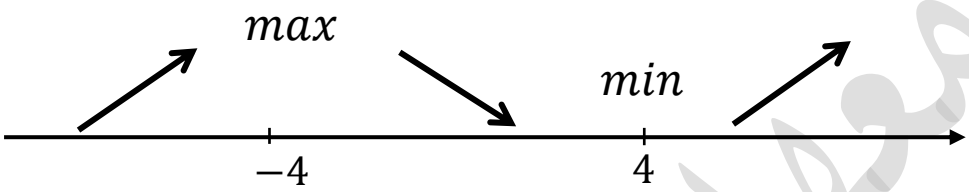
$$3-\frac{48}{t^2}=0$$

$$3t^2=48$$

$$t^2 = 16$$

$$t = \pm 4$$

نجد نوع النقاط القصوى:



↓

$$t = 4 \quad , min$$

(ج) { جدوا محيط ΔABC }

$$p_{\Delta ABC} = AC + BC + AB$$

$$C(-4\,,4)$$

$$B(4\,,4)$$

$$A(0\,,-2)$$

↓

$$BC = x_B + |x_c| = 2 + 2 = 4$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + \big(4-(-2)\big)^2}$$

$$= 2\sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(-4-0)^2 + \big(4-(-2)\big)^2}$$

$$= 2\sqrt{13}$$

$$\downarrow$$

$$p_{\Delta ABC} = AC + BC + AB = 2\sqrt{13} + 8 + 2\sqrt{13} = 8 + 4\sqrt{13}$$

$$\downarrow$$

$$p_{\Delta ABC} \approx 22.42$$

معهد إيهاب عمر