دوال لوجاريتمية – 2023 صيف خاص

5. معطاة الدالّة $f(x)=\frac{1-\ell nx}{\ell nx}$.

أ. **(1)** جدوا مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالّة $f(x)$.

(3) جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

(4) ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

معطاة الدالّة $g(x)=\ell n(-f(x))$.

ب. **(1)** جدوا مجال تعريف الدالّة $g(x)$.

(2) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالّة $g(x)$.

(3) جدوا مجالات موجبيّة وسالبيّة الدالّة $g(x)$.

(4) ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $g(x)$.

نرمز بـ a إلى الإحداثيّ x لنقطة تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$.

جـ. من بين التعابير I–III ، حدِّدوا أيّ تعبير هو الأكبر وأيّ تعبير هو الأصغر (لا حاجة لإيجاد قيمة a). علِّلوا إجابتكم.

I. $\int_{a+1}^{a+2}(g(x)-f(x))\,dx$ II. $\int_{a+3}^{a+4}(g(x)-f(x))\,dx$ III. العدد 1

أ) (1) مجال التعريف

$$f(x)=\frac{1-lnx}{lnx}$$

$x>0$

$lnx\neq 0$

$x\neq 1$

أ) (2) خطوط التقارب

عمودية

$$lim_{x\to 0^+}\frac{1-lnx}{lnx}=\frac{\infty}{-\infty}=-1$$

$$lim_{x\to 1}\frac{1-lnx}{lnx}=\frac{1}{0}=\infty$$

أفقية

$$lim_{x\to \infty}\frac{1-lnx}{lnx}=\frac{-\infty}{\infty}=-1$$

خطوط تقارب: $y=-1\ ,\ x=1$

ثغرة: $(0,-1)$

أ) (3) تصاعد وتنازل

نطلب $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}lnx-\frac{1}{x}(1-lnx)}{ln^2x}=\frac{-\frac{1}{x}lnx-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}lnx}{ln^2x}=-\frac{1}{xln^2x}$$

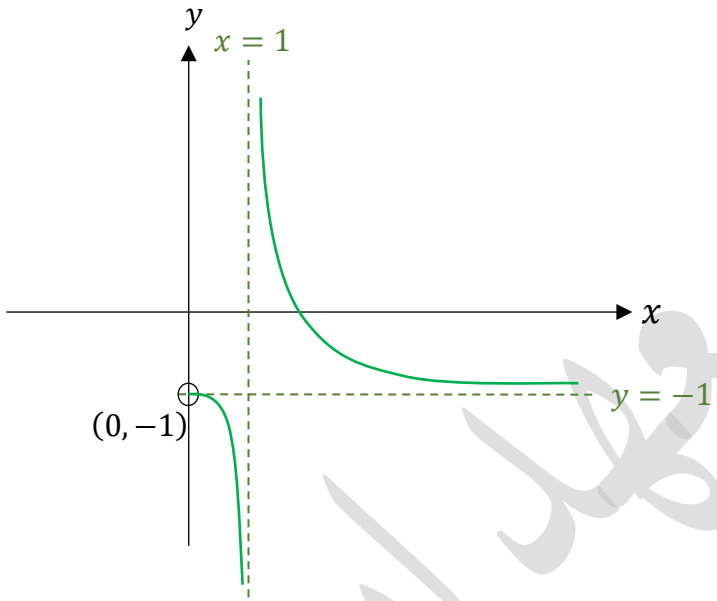
$$-\frac{1}{xln^2x}=0$$

$\emptyset$ لا يوجد نقاط قصوى، نصنّف:

	0	0.5	1	2
$f'(x)$	ثغرة	−	مجال غير معرف	−
$f(x)$		↘		↘

تنازل: $x>0\ ,\ x\neq 1$ تصاعد: لا يوجد

أ) (4) رسم $f(x)$



ب) (1) مجال تعريف $g(x)$

$$g(x) = \ln(-f(x))$$

مجال تعريف $g(x)$ نفسه الذي لـ $f(x)$ بالإضافة الى:

$$-f(x) > 0$$

$$: -1$$

$$f(x) < 0$$

حسب الرسم، $f(x)$ قيمها سالبة في
$0 < x < 1$ و بعد نقطة التقاطع مع x، نجدها:

$$\frac{1 - lnx}{lnx} = 0 \quad \xrightarrow{\cdot lnx} \quad 1 = lnx \quad \rightarrow \quad x = e$$

إذًا مجال التعريف هو:

$$0 < x < 1 \, , x > e$$

ب) (2) خطوط تقارب $g(x)$

عمودية

$lim_{x\to 0^+} ln(-f(x)) = ln(1) = 0$

$lim_{x\to 1} ln(-f(x)) = ln(\infty) = \infty$

$lim_{x\to e} ln(-f(x)) = ln(0) = -\infty$

أفقية

$lim_{x\to \infty} ln(-f(x)) = ln(1) = 0$

خطوط تقارب: $y = 0\ ,\ x = e\ ,\ x = 1$

ثغرة: $(0,0)$

ب) (3) موجبية وسالبية $g(x)$

موجبية

$g(x) > 0$

$\ln(-f(x)) > 0$

$-f(x) > 1$

$f(x) < -1$

حسب الرسم:

$0 < x < 1$

سالبية

$g(x) < 0$

$\ln(-f(x)) < 0$

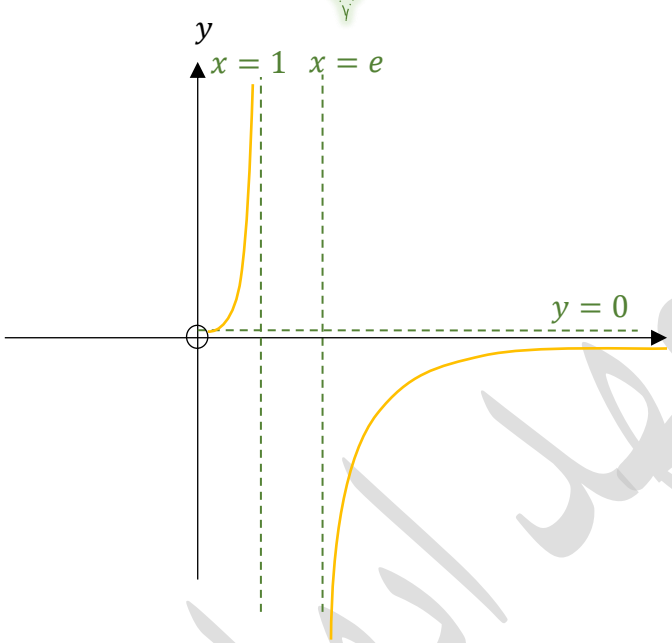
$0 < -f(x) < 1$

$-1 < f(x) < 0$

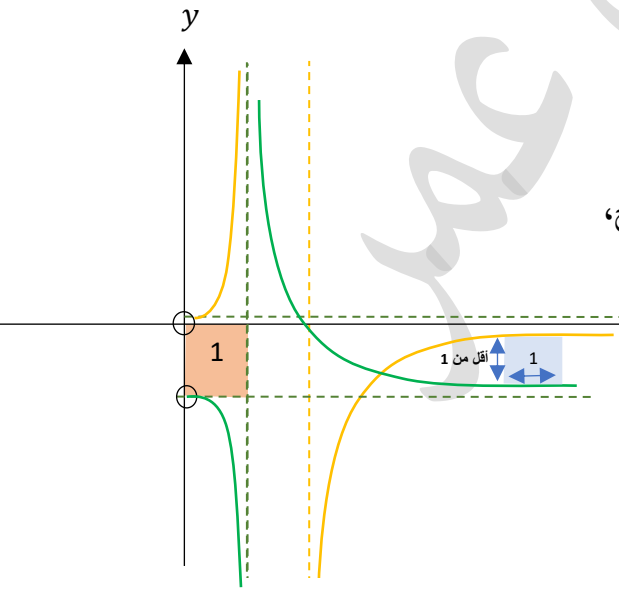
حسب الرسم:

$x > e$

ب) (4) رسم $g(x)$



ب) (4) أصغر وأكبر تعبير



لتسهيل الحل، نرسم الرسمين على نفس المحاور:

كما نرى، في كلا التعبيرين I و II سنقوم بطرح قيم الدالة $f(x)$ من قيم الدالة $g(x)$ وسيبقى دائما هذا التعبير اصغر من 1 صحيح، لأنه مساحة المستطيل الأزرق أصغر من البرتقالي في الرسم.

لذلك التعبير الأكبر هو III.

بعد نقطة تقاطع الدالتين نلاحظ أن المساحة تكبر كلما كبر الـ x في مجال التكامل لذلك التعبير الأصغر هو I.

I. $\int_{a+1}^{a+2} (g(x)-f(x))\,dx$ II. $\int_{a+3}^{a+4} (g(x)-f(x))\,dx$ III. العدد 1

نهاية السؤال ☺

معهد إيهاب عمر