

موعد شتاء 2021

سؤال 4:

معطاة الدالة  $f(x) = \frac{a \cdot e^x}{e^x - a}$  ،  $a > 0$  هو پارامتر.

- أ. (1) عبّر بدلالة  $a$  عن مجال تعريف الدالة  $f(x)$  ، وعن معادلة خط التقارب العمودي للدالة  $f(x)$  .  
 (2) عبّر بدلالة  $a$  عن إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة  $f(x)$  مع المحورين (إذا وجدت مثل هذه النقاط) .

ب. عبّر بدلالة  $a$  عن مجالات تنازل الدالة  $f(x)$  .

معطى أن نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة  $f(x)$  مع المحور  $y$  هي  $(0, -2)$  .  
 جـ. جد  $a$  .

د. يوجد للدالة  $f(x)$  خطًا تقارب أفقيًا:  $y = 2$  بالنسبة لـ  $x \rightarrow \infty$  و  $y = 0$  بالنسبة لـ  $x \rightarrow -\infty$  .  
 ارسم رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالة  $f(x)$  .

هـ. معطاة الدالة  $g(x) = |f(x)|$  .

ما هي إحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة  $g(x)$  مع المحور  $y$  ؟

(أ) (1) نجد مجال التعريف ومعادلة خط التقارب العامودي:

$$f(x) = \frac{a \cdot e^x}{e^x - a}$$

$$e^x - a \neq 0$$

⇓

$$e^x \neq a$$

⇓

مجال التعريف:  $x \neq \ln a$

معادلة خط التقارب العامودي ←  $x = \ln a$

(2) نجد نقاط التقاطع مع المحاور:

التقاطع مع محور  $y$  :

$$f(0) = \frac{a \cdot e^0}{e^0 - a} = \frac{a}{1-a}$$

⇓

$$\left(0, \frac{a}{1-a}\right)$$

التقاطع مع محور  $x$  :

$$f(x) = 0$$

⇓

$$f(x) = \frac{a \cdot e^x}{e^x - a}$$

⇓

$$0 = \frac{a \cdot e^x}{e^x - a}$$

$$\cdot (e^x - a)$$

⇓

$$0 = a \cdot e^x$$

⇓

$$0 = e^x$$

✗

لا يوجد تقاطع مع محور  $x$

(ب) نجد مجالات تصاعد وتنازل الدالة:

$$f'(x) = 0$$

⇓

$$f'(x) = \frac{ae^x(e^x - a) - ae^x \cdot e^x}{(e^x - a)^2}$$

⇓

$$0 = \frac{ae^x \cdot e^x - a^2 \cdot e^x - ae^x \cdot e^x}{(e^x - a)^2}$$

⇓

$$0 = \frac{-a^2 \cdot e^x}{(e^x - a)^2}$$

$$\cdot (e^x - a)^2$$

⇓

$$0 = -a^2 \cdot e^x$$

⇓

$$0 = -e^x$$

✗

كما نرى في المعادلة أعلاه ان المشتقة دائما سالبة لأي  $x$  نعوضه في مجال التعريف،

لذا فان الدالة تنازلية لكل  $x$  في مجال تعريفها

(ج) نجد  $a$ :

معطى أنّ:  $(0, -2)$  هي نقطة تقاطع الدالة مع محور  $y$ .  
وجدنا في بند سابق ان نقطة التقاطع هي  $\left(0, \frac{a}{1-a}\right) \leftarrow$

$\Downarrow$

$$\frac{a}{1-a} = -2$$

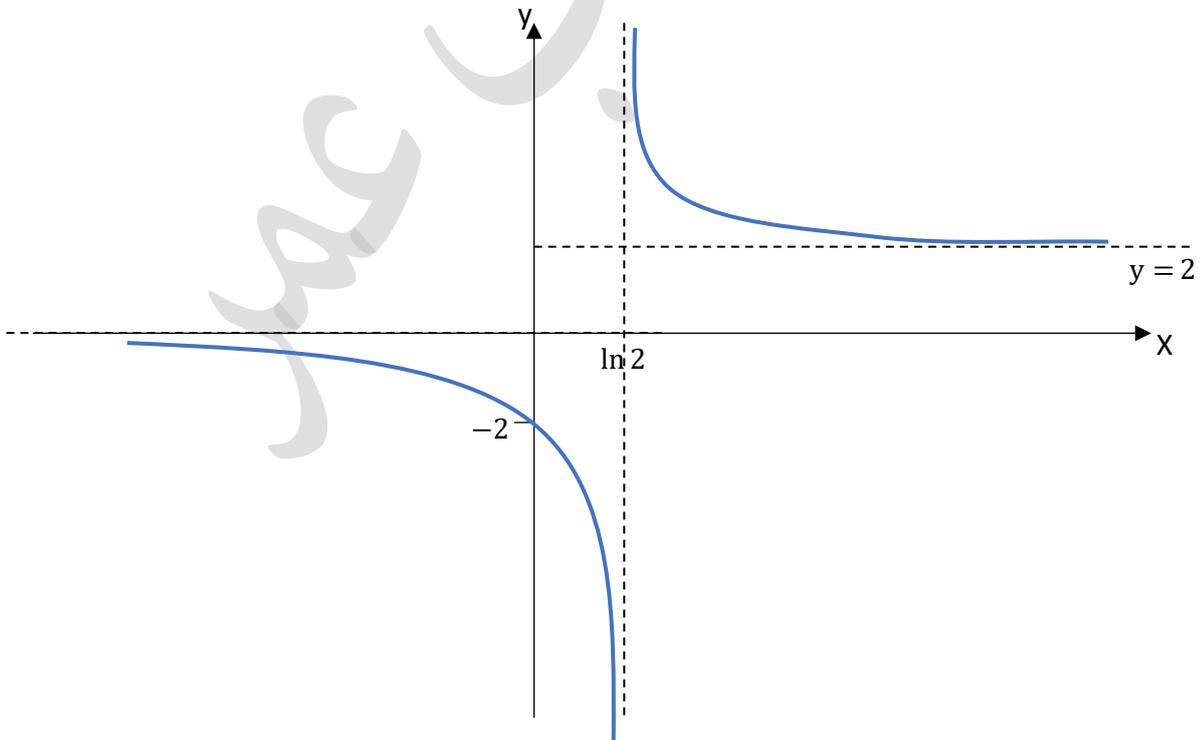
$\Downarrow$

$$a = -2 + 2a$$

$\Downarrow$

$$a = 2$$

(د) الرسم البياني:



(ه) نجد نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة  $g(x)$  مع محور  $y$  :

$$g(x) = |f(x)|$$

↓

$$g(0) = |f(0)| = |-2| = 2$$

↓

$$(0, 2)$$

نقطة تقاطع الرسم البياني لـ  $g(x)$  مع محور  $y$  ←  $(0, 2)$