قيم قصوى صيف ب 2024

8. معطاة الدالّة $f(x)=\sqrt{x}$ ، المعرَّفة في المجال $x \ge 0$ ، ومعطاة الدالّة $g(x)=\frac{32}{x^2+3}$ ، المعرَّفة لكلّ x .

أ. (1) جدوا إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة $g(x)$ ، وحدّدوا نوع هذه النقطة.

(2) جدوا إحداثيّات نقاط الْتواء الدالّة $g(x)$.

(3) ارسموا في هيئة محاور واحدة، رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا لكلّ واحدة من الدالّتَيْن $f(x)$ وَ $g(x)$.

يمرِّرون عمودًا على المحور x في النقطة $C(t,0)$ ، $t>0$.

العمود يقطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في النقطة A ، ويقطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ في النقطة B .

ب. عبِّروا بدلالة t عن حاصل ضرب طولَي القطعتَيْن AC وَ BC .

جـ. برهِنوا أنّ حاصل ضرب طولَي القطعتَيْن AC وَ BC يكون أكبر ما يمكن، عندما تكون النقطة B هي نقطة الْتواء للدالّة $g(x)$.

معطاة الدالّة $k(x)=\frac{8\sqrt{x-5}}{(x-5)^2+3}$ ، المعرَّفة في المجال $x \ge 5$.

د. استعينوا ببنود السؤال السابقة. جدوا إحداثيّات النقطة القصوى الداخليّة للدالّة $k(x)$ ، وحدّدوا نوع هذه النقطة. علّلوا إجابتكم.

الحل:

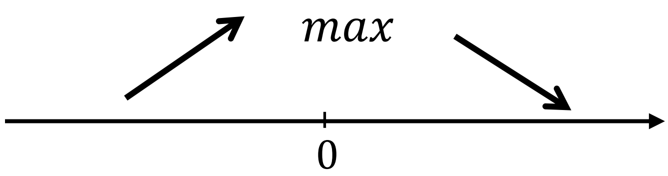
أ.(1) $\left\{ \text{نجد احداثيات النقطة القصوى في } g(x) \right\}$

$$g'(x)=\frac{-32\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$g'(x)=0$$

$$\frac{-64x}{(x^2+3)^2}=0$$

$$x=0$$



$$\Downarrow$$

$$\max\left(0\,,10\frac{2}{3}\right)$$

(2) نجد احداثيات نقاط التواء الدالة في $g(x)$

$$g'(x)=\frac{-64x}{(x^2+3)^2}$$

$$g''(x)=\frac{-64\cdot(x^2+3)^2-(-64x)\cdot 2\cdot(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$g''(x)=0$$

$$\Downarrow$$

$$-64\cdot(x^2+3)^2+256x^2\cdot(x^2+3)=0$$

$$(x^2+3)^2-4x^2\cdot(x^2+3)=0$$

$$(x^2+3)(x^2+3-4x^2)=0$$

$$x^2+3=0$$

$$\cancel{x^2=-3}$$

$$-3x^2+3=0$$

$$x^2=1$$

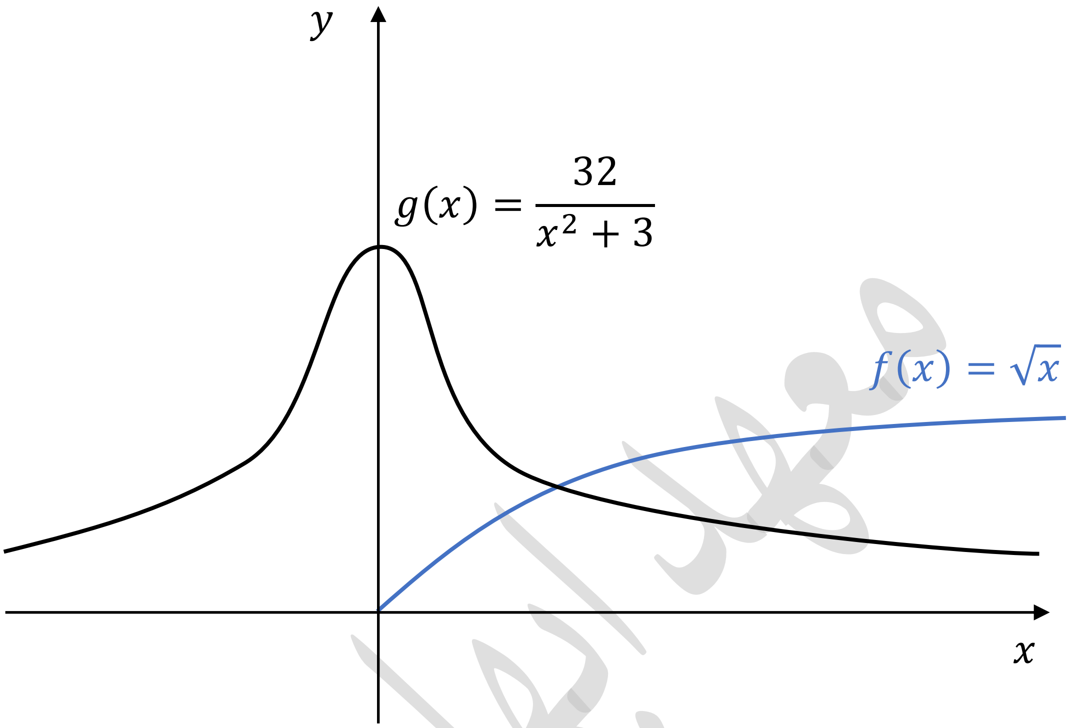
$$x=1 \quad x=-1$$

$\cup$	التواء	$\cap$	التواء	$\cup$
	-1		1	

$$\Downarrow$$

نقاط الالتواء:$(1,8)(-1,8)$

(3) { نرسم الدالتين $f(x)$ و- $g(x)$ }



ب) { نعبر بدلالة t عن حاصل ضرب AC و- BC }

نعوض t في $f(x)$ لنجد احداثي y للنقطة A: $C(t,\sqrt{t})$

نعوض t في $f(x)$ لنجد احداثي y للنقطة B: $B\left(t,\frac{32}{t^2+3}\right)$

$$\Downarrow$$

$$AC=\sqrt{t}-0=\sqrt{t}$$

$$BC=\frac{32}{t^2+3}-0=\frac{32}{t^2+3}$$

$$\Downarrow$$

$$AC\cdot BC=\frac{32\sqrt{t}}{t^2+3}$$

ج

نبرهن أن $AC \cdot BC$ يكون اكبر ما يمكن
عندما تكون B نقطة التواء في $g(x)$

<u>نبني دالة جديدة:</u>

$$h(t)=\frac{32\sqrt{t}}{t^2+3}$$

$$h'(t)=\frac{\frac{32(t^2+3)}{2\sqrt{t}}-32\sqrt{t}\cdot 2t}{(t^2+3)^2}$$

$$h'(t)=\frac{\frac{16(t^2+3)}{\sqrt{t}}-64t\sqrt{t}}{(t^2+3)^2}$$

$$h'(t)=\frac{16(t^2+3)-64t^2}{\sqrt{t}\cdot(t^2+3)^2}$$

$$h'(t)=0$$

$$\Downarrow$$

$$16(t^2+3)-64t^2=0$$

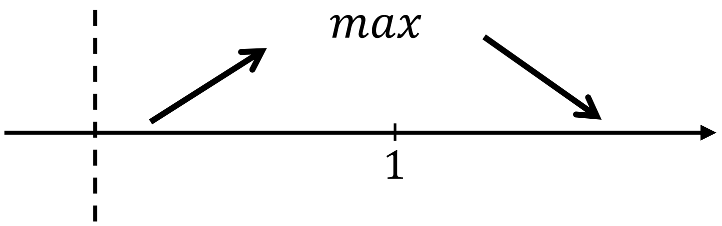
$$16t^2+48-64t^2=0$$

$$-48t^2=-48$$

$$t^2=1$$

$$t=1 \qquad t=-1$$

مجال تعريف الدالة: $t>0$



$$\Downarrow$$

B(1,8) هي نقطة التواء في $g(x)$ وتحقق ان مضروب $AC \cdot BC$ اكبر ما يمكن

د) نجد النقطة القصوى الداخلية ونوعها في الدالة $k(x)$

$$(x \geq 5) \quad k(x) = \frac{8\sqrt{x-5}}{(x-5)^2+3}$$

$$h(x) = h(t)$$

$$h(x) = \frac{32\sqrt{x}}{x^2+3}$$

$$\Downarrow$$

$$h(x-5) = \frac{32\sqrt{x-5}}{(x-5)^2+3}$$

$$\frac{1}{4}h(x-5) = \frac{8\sqrt{x-5}}{(x-5)^2+3} = k(x)$$

وجدنا سابقًا:

النقطة القصوى في$h(x)$: $max(1,8)$

$$\Downarrow$$

نضيف 5 على احداثي x ونقسم على 4 احداثي y

$$\Downarrow$$

$$(1{,}8) \Rightarrow (6\,{,}2)$$

$$\Downarrow$$

max(6 ,2)